1 Dadas las funciones: $f(x)=x^2-4x$; $g(x)=4-4x$

a) Esbozar el gráfico del recinto delimitado por las funciones: $f(x)$ y $g(x)$

b) Determinar el área del recinto limitado por las funciones: $f(x)$ y $g(x)$.

— o —

a) $f(x)=x^2-4x$. es una parábola. función cuadrática.
$g(x)=-4x+4$ es una recta. función afín

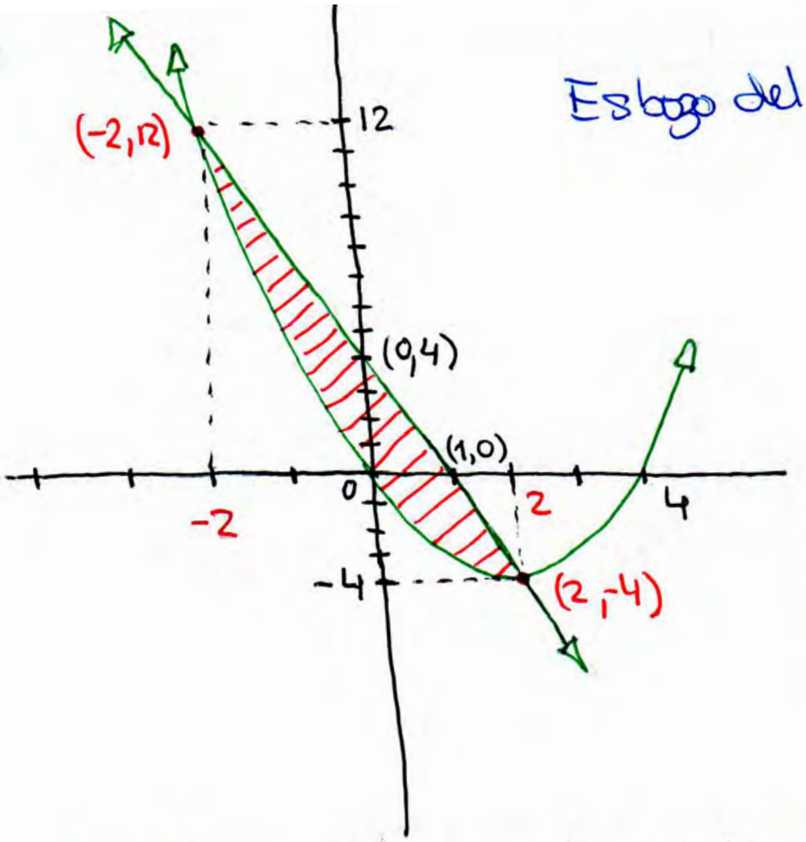
⇝ Estudio de la parábola:

- corte eje X $(y=0) \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x(x-4)=0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow x=0$ ó $x=4$ en los puntos:
  $\begin{cases} (0,f(0))=(0,0) \\ (4,f(4))=(4,4^2-4\cdot 4)=(4,0) \end{cases}$
- corte eje Y $(x=0) \Rightarrow f(0)=0$ „ $(0,0)$
- vértice de la parábola $y=ax^2+bx+c \Rightarrow$
  $\Rightarrow V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)=\left(\frac{4}{2}, f(2)\right)=(2, 2^2-4\cdot 2) \Rightarrow$
  $\Rightarrow V(2,-4)$

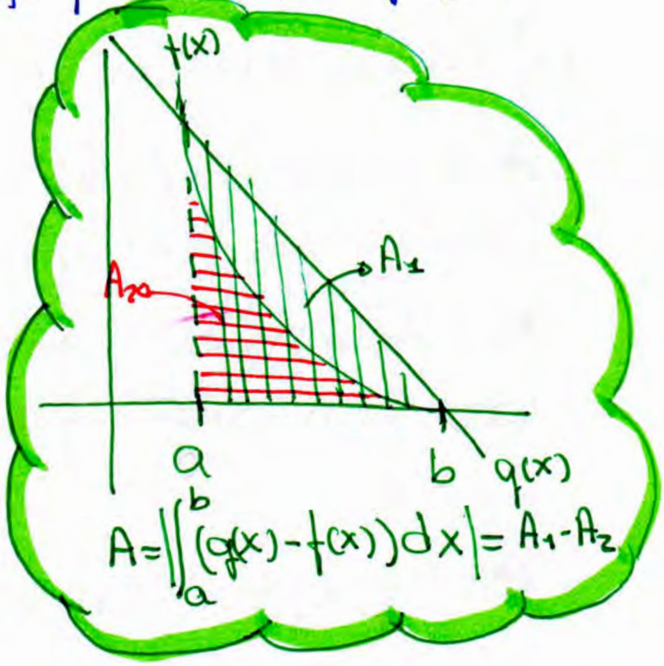
⇝ Estudio de la recta:

- corte eje X $(y=0) \Rightarrow -4x+4=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,0)$
- corte eje Y $(x=0) \Rightarrow g(0)=-4\cdot 0+4=4 \Rightarrow (0,4)$

⇝ Intersección de $f(x)$ y $g(x) \Rightarrow x^2-4x=-4x+4$
$\Rightarrow x^2-4x+4x-4=0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4} \Rightarrow x=\pm 2$
$\Rightarrow (2,f(2))=(2,-4)$ y $(-2,f(-2))=(-2,12)$.



Esbozo del gráfico de f(x) y g(x)



b Área del recinto delimitado por f(x) y g(x)

$$A_R = \int_{-2}^{2} g(x)-f(x) = \int_{-2}^{2} (4-4x-(x^2-4x))\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} (4\cancel{-4x}-x^2\cancel{+4x})\,dx = \int_{-2}^{2} (4-x^2)\,dx =$$

$$= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = 8-\frac{8}{3} - \left(-8+\frac{8}{3}\right) = 8-\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3} =$$

$$= 16 - \frac{16}{3} = \frac{48-16}{3} = \frac{32}{3}\,u^2 = 1'\hat{6}\,u^2$$

Recordar $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$

INTEGRAL DEFINIDA, siendo $\int f(x)\,dx = F(x)$

2 En la liga Mate-Basket, las mujeres matemáticas con mayor puntuación son: Lovelace, Noerther y Germain. Las tres acumulan 17.500 puntos. Además, lo que ha anotado Germain más 2.500 puntos es equivalente a la mitad de lo anotado por Lovelace. Finalmente, Noerther anotó el doble que Germain. Escriba el ranking de puntuaciones de la liga Mate-Basket de las jugadoras: Lovelace, Noerther y Germain.

Ranking

x: Puntos anotados por Lovelace : $\boxed{10.000}$

y: Puntos anotados por Noerther $\boxed{5.000}$

z: Puntos anotados por Germain $\boxed{2.500}$

$$\begin{cases} x+y+z=17500 \\ z+2500=\dfrac{x}{2} \\ y=2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=17500 \\ x-2z=5000 \\ y-2z=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 17500 \\ 1 & 0 & -2 & 5000 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2=F_2-F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 17500 \\ 0 & -1 & -3 & -12500 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{\substack{F_3 \leftrightarrow F_2 \\ F_2 \leftrightarrow F_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 17500 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -12500 \end{array}\right) \underset{F_3=F_3+F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 17500 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -12500 \end{array}\right) \Rightarrow -5z=-12500$$

$$\Rightarrow \boxed{z=\frac{-12500}{-5}=2500};\ y-2(2500)=0 \Rightarrow \boxed{y=5000}$$

$$x+5000+2500=17500 \Rightarrow \boxed{x=10000}$$

$\boxed{3}$ Dado el plano $\pi: -x+3y+2z+5=0$ y las rectas secantes: $r: \frac{x-5}{2} = y+2 = 1-z$ y $s: \frac{x+1}{6} = \frac{y}{-2} = z$

ⓐ Sea A el punto de intersección de las rectas r y s. Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular al plano π y que pasa por A.

ⓑ Calcular el ángulo que forman las rectas r y s.

ⓐ Llamaremos "t" a la recta pedida, esta estará determinada por: $\begin{cases} \text{A punto intersección de r y s} \\ \text{Como } t \perp \pi \Rightarrow \vec{v_t} = \vec{n}_\pi \\ \text{nos vale el vector normal de } \pi \\ \text{como director de la recta t} \end{cases}$

Calculo del punto $A(x, y, z)$ tal que debe verificar las ecuaciones de las dos rectas.

Desarrollemos cada una:

$$r \equiv \begin{cases} \frac{x-5}{2} = y+2 \\ y+2 = 1-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-5 = 2y+4 \\ y+z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y = 9 \\ y+z = -1 \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} \frac{x+1}{6} = \frac{y}{-2} \\ \frac{x+1}{6} = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x-2 = 6y \\ x+1 = 6z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x-6y=2 \\ x+3y=-1 \\ x-6z=-1 \end{cases}$$

Montamos el sistema de ecuaciones de las dos rectas $\begin{cases} x-2y=9 \\ y+z=-1 \\ x+3y \ \ -1 \\ x-6z=-1 \end{cases}$ y resolvemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -6 & -1 \end{array}\right) \underset{F_4=F_4-F_1}{\overset{F_3=F_3-F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & -10 \\ 0 & 2 & -6 & -10 \end{array}\right) \underset{F_4=F_4-2F_2}{\overset{F_3=F_3-5F_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{\substack{F_3=\frac{F_3}{-5} \\ F_4=\frac{F_4}{-8}}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_4=F_4-F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

3º $\rightarrow \boxed{z=1}$

2º $\rightarrow y+1=-1 \Rightarrow \boxed{y=-2}$

1º $\rightarrow x-2(-2)=9 \Rightarrow \boxed{x=5}$

El punto A intersección de r y s es $A(5,-2,1)$

Retomamos la recta "t" pedida:

$$t \equiv \begin{cases} A(5,-2,1) \\ \text{vector director}: \vec{n}_{\pi}(-1,3,2) \end{cases}$$

Un plano $Ax+By+Cz+D=0$ tiene como vector normal $\vec{n}(A,B,C)$

$$t \equiv \frac{x-5}{-1} = \frac{y-(-2)}{3} = \frac{z-1}{2} \Rightarrow t \equiv \frac{x-5}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{2}$$

EC. CONTÍNUA DE LA RECTA PEDIDA

b) $(\widehat{r,s}) = (\vec{v_r}, \vec{v_s})$, $\vec{v_r}(2,1,-1)$, $\vec{v_s}(6,-2,1)$

$$(\widehat{r,s}) = \arccos\left(\frac{\vec{v_r}\cdot\vec{v_s}}{|\vec{v_r}|\cdot|\vec{v_s}|}\right) = \arccos\left(\frac{9}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{41}}\right) = 54'98^\circ$$

NOTA:

$|\vec{v_r}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$, $|\vec{v_s}| = \sqrt{36+4+1} = \sqrt{41}$

$\vec{v_r}\cdot\vec{v_s} = 2\cdot 6 + 1\cdot(-2) + (-1)\cdot 1 = 12-2-1 = 9$

4 Suponiendo que el tiempo de espera en la cola de correos sigue una distribución normal de media 7'5 minutos y 2 minutos de desviación típica.

(a) Hallar el porcentaje de personas que esperan más de 9 minutos.

(b) Correos afirma que: "Menos del 40% de las personas que acuden a correos esperan entre 7 y 10 minutos". ¿Es correcta la afirmación?.

— o —

Distribución normal $N(7'5, 2)$, con $\mu = 7'5$ y $\sigma = 2$

Recordemos tipificar: $P(X \leq n) = P\left(Z \leq \frac{n-\mu}{\sigma}\right)$

(a) El porcentaje de personas que esperan más de 9 minutos es:

$$P(X>9) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - P\left(Z \leq \frac{9-7'5}{2}\right) =$$
$$= 1 - P(Z \leq 0'75) = 1 - 0'7734 = 0'2266$$

El porcentaje es del 22'66%

(b) Ver si es cierto que menos del 40% esperan entre 7 y 10 minutos: $P(7 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) -$
$- P(X \leq 10) = P\left(Z \leq \frac{10-7'5}{2}\right) - P\left(Z \leq \frac{7-7'5}{2}\right) =$

$= P(Z \leq 1'25) - P(Z \leq -0'25) =$

$\overset{*}{=} P(Z \leq 1'25) - (1 - P(Z \leq 0'25)) =$

$= P(Z \leq 1'25) - 1 + P(Z \leq 0'25) =$

$= 0'8944 - 1 + 0'5987 = 0'4931$, en porcentaje: 49'31%

¡LA AFIRMACIÓN NO ES CORRECTA!