1 Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+a}{2x-4}, & x \leq 0 \\ 10x^2+x+b, & x>0 \end{cases}$

Calcular los valores de los parámetros: a y b para que la función f(x) sea contínua y derivable en ℝ. Dar las expresiones de la función f(x) y de su derivada f'(x).

— o —

1 Estudiamos los trozos individualmente:

⟹ $\dfrac{x^2+a}{2x-4}$ presenta una discontinuidad cuando el denominador: $2x-4=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow \boxed{x=2}$ pero $2 \notin (-\infty, 0]$ su intervalo de definición. Por tanto es contínua en su intervalo de definición.

⟹ $10x^2+x+b$ es contínua en todo ℝ.

2 Estudiemos la continuidad en $x=0$: "frontera de los dos trozos".

- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2+a}{2x-4} = \dfrac{0+a}{0-4} = \dfrac{-a}{4}$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} (10x^2+x+b) = 0+0+b = b$
- $f(0) = \dfrac{0^2+a}{-4} = \dfrac{-a}{4}$

$\Rightarrow$

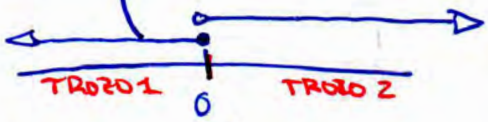
$\Rightarrow$ Imponemos que f(x) sea contínua en "$x=0$" $\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow \dfrac{-a}{4} = b \Rightarrow -a = 4b \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a=-4b}$

PREMISA 1.

3 Estudio de la derivabilidad:

$$f'(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{x^2+a}{2x-4}\right)' & , x\leq 0\\ (10x^2+x+b)' & , x>0\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x-a}{2(x^2-4x+4)} & , x\leq 0 \quad \text{TROZO 1}\\ 20x+1 & , x>0 \quad \text{TROZO 2}\end{cases}$$



NOTA:

- $$\left(\frac{x^2+a}{2x-4}\right)'=\frac{(x^2+a)'\cdot(2x-4)-(x^2+a)\cdot(2x-4)'}{(2x-4)^2}=$$

$$=\frac{2x(2x-4)-(x^2+a)\cdot 2}{4x^2-16x+16}=\frac{4x^2-8x-2x^2-2a}{4(x^2-4x+4)}=$$

$$=\frac{2x^2-8x-2a}{4(x^2-4x+4)}=\frac{2(x^2-4x-a)}{4(x^2-4x+4)}=\frac{x^2-4x-a}{2(x^2-4x+4)}$$

- $(10x^2+x+b)'=20x+1$.

$$f'(0^-)=\frac{0^2-4\cdot 0-a}{2(0^2-4\cdot 0+4)}=\frac{-a}{8} \quad \text{y} \quad f'(0^+)=20\cdot 0+1=1$$

Para que $f(x)$ sea derivable en "$x=0$" $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $f'(x)$ debe ser continua en "$x=0$" $\Rightarrow$ $\Rightarrow f'(0^-)=f'(0^+) \Rightarrow \dfrac{-a}{8}=1 \Rightarrow \boxed{a=-8}$

PREMISA 2.

- $\left.\begin{cases} a=-4b \\ a=-8\end{cases}\right\} \Rightarrow -8=-4b \Rightarrow \boxed{b=2}$

Los parámetros a y b deben tener los valores: $a=-8$ y $b=2$

con $\boxed{\begin{matrix} a=-8 \\ b=2 \end{matrix}}$ $\boxed{f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-8}{2x-4} & \text{"} \quad x\leq 0 \\ 10x^2+x+2 & \text{"} \quad x\geq 0 \end{cases}}$

y la expresión de $\boxed{f'(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4x+8}{2(x-2)^2} & , \quad x\leq 0 \\ 20x+1 & , \quad x>0 \end{cases}}$

— o —

2 Se consideran las matrices: $A=\begin{pmatrix}1&-1\\4&2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&0\\4&-1\end{pmatrix}$

a) Sea la matriz $M=A+c\cdot B$, donde c es un número real cualquiera. Calcular los valores de c de forma que el rango de M sea 1 ($r(M)=1$)

b) Sea la matriz $D=A^2+B\cdot A$. Averiguar la matriz X, que cumple la siguiente ecuación matricial:

$$D\cdot X=-30\cdot\begin{pmatrix}2&1&3\\0&1&4\end{pmatrix}$$

---

a) Cálculo de M:

$$M=A+c\cdot B=\begin{pmatrix}1&-1\\4&2\end{pmatrix}+c\cdot\begin{pmatrix}1&0\\4&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\4&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c&0\\4c&-c\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1+c&-1\\4+4c&2-c\end{pmatrix}$$

Si $r(M)=1\Rightarrow|M|=0$, entonces forzamos que $|M|=0$ y calcularemos los valores de $c\in\mathbb{R}$.

$$|M|=\begin{vmatrix}1+c&-1\\4+4c&2-c\end{vmatrix}=(1+c)(2-c)+4+4c=2-c+2c-c^2+4+4c=$$

$$=-c^2+5c+6\ ;\ -c^2+5c+6=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c=\frac{-5\pm\sqrt{25-4\cdot(-1)\cdot 6}}{-2}=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{-2}=\frac{-5\pm7}{-2}=\begin{cases}\boxed{-1}\\\boxed{6}\end{cases}$$

Para los valores: $c=-1$ y $c=6$, el $r(M)=1$.

b) $D=A^2+B\cdot A=\begin{pmatrix}-3&-3\\12&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1\\0&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-4\\12&-6\end{pmatrix}$

NOTA:

$$A^2=\begin{pmatrix}1&-1\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-3\\12&0\end{pmatrix};\ B\cdot A=\begin{pmatrix}1&0\\4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&-6\end{pmatrix}$$

Nos piden X, tal que: $D \cdot X = -30\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$

multiplicando a la izquierda por D^{-1}, a ambos lados

$\Rightarrow D^{-1} \cdot (D \cdot X) = D^{-1}\begin{pmatrix} -60 & -30 & -90 \\ 0 & -30 & -120 \end{pmatrix} \Rightarrow$

aplicamos la prop. asociativa

$\Rightarrow (D^{-1} \cdot D) \cdot X = D^{-1}\begin{pmatrix} -60 & -30 & -90 \\ 0 & -30 & -120 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$D^{-1} \cdot D = I_2$ y $I_2 \cdot X = X$, I_2 matriz identidad de orden 2

$\Rightarrow X = D^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -60 & -30 & -90 \\ 0 & -30 & -120 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow X = -30 \cdot D^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

NOTA:

D^{-1}?

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & -4 & 1 & 0 \\ 12 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 = F_2 + 6F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -30 & 6 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = \frac{F_2}{-30}]{F_1 = \frac{F_1}{-2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-6}{30} & -\frac{1}{30} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{30} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 = F_1 - 2F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2}{30} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{-1}{30} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{-5+4}{10} = \frac{-1}{10}$$

$$\Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{10} & \frac{1}{15} \\ \frac{-1}{5} & \frac{-1}{30} \end{pmatrix}$$

OTRA FORMA: $D^{-1} = \frac{1}{|D|} \cdot (\text{Adj}(D))^t$; $|D| = 12 + 48 = \underline{60}$

$\text{Adj}(D) = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ | $a_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-6) = -6$, $a_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (12) = -12$
$a_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-4) = 4$, $a_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (-2) = -2$

$$D^{-1} = \frac{1}{60} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -12 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-6}{60} & \frac{4}{60} \\ \frac{-12}{60} & \frac{-2}{60} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{10} & \frac{1}{15} \\ \frac{-1}{5} & \frac{-1}{30} \end{pmatrix} \text{ OK!!}$$

Entonces:

$$X = -30\begin{pmatrix} \frac{-1}{10} & \frac{1}{15} \\ \frac{-1}{5} & \frac{-1}{30} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 12 & 7 & 22 \end{pmatrix}$$

ok!

3 Dadas las siguientes ecuaciones en el espacio tridimensional:

$r: 5-x = y-3 = 5-z$ y $\pi: 3x-4y-8z+35=0$

a) Comprobar que la recta r y el plano π se cortan en un punto. Averiguar dicho punto.

b) Calcular la ecuación del plano que pasa por el punto $A(2,2,2)$, paralelo a la recta r, y perpendicular al plano π.

$r \left\{ \begin{array}{l} P(p_1,p_2,p_3) \\ \vec{v_r}(v_1,v_2,v_3) \end{array} \right. \quad \frac{x-p_1}{v_1}=\frac{y-p_2}{v_2}=\frac{z-p_3}{v_3}$ EC. CONTÍNUA

— o —

a) Estudiamos la recta:

$$r: 5-x = y-3 = 5-z \Rightarrow \frac{x-5}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-5}{-1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \vec{v_r}(-1,1,-1)$ y pasa por $(5,3,5)$

Además, desarrollando la ecuación contínua conseguimos r como intersección de dos planos:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-5}{-1} = y-3 \\ \frac{x-5}{-1} = \frac{z-5}{-1} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x-5 = 3-y \\ x-5 = z-5 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x+y=8 \\ x-z=0 \end{array} \right.$$

Para hallar la interseccion montamos el sistema con las tres ecuaciones (2 de la recta y 1 del plano)

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y=8 \\ x-z=0 \\ 3x-4y-8z=-35 \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & -8 & -35 \end{array} \right)}_{A^*}$$

A matriz de coeficientes
A^* matriz ampliada

$$|A| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & -8 \end{array} \right| = -3-4+8 = 1 \neq 0 \Rightarrow$$ sistema compatible determinado, con una única solución, pues $r(A) = r(A^*) = 3 = $ nº incógnitas

Para averiguar el punto de corte, resolvemos el sistema. Podríamos hacerlo sustituyendo valores de variables, por CRAMER o triangularizando por GAUSS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&8\\1&0&-1&0\\3&-4&-8&-35\end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-F_1\\F_3=F_3-3F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&8\\0&-1&-1&-8\\0&-7&-8&-59\end{array}\right) \underset{\substack{F_2=-F_2\\F_3=F_3+7F_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&8\\0&1&1&8\\0&0&1&3\end{array}\right)$$

Pasamos a ecuaciones: $\boxed{z=3}$

$$\left.\begin{array}{l} y+z=8,\ z=3 \Rightarrow y=8-3 \Rightarrow \boxed{y=5} \\ x+y=8,\ y=5 \Rightarrow x=8-5 \Rightarrow \boxed{x=3} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $P(3,5,3)$ es el punto donde se cortan la recta r y el plano π.

(b) $\pi' \equiv \begin{cases} A(2,2,2) \\ \pi' \parallel r \Rightarrow \text{contiene al vector director de } r \\ \pi' \perp \pi \Rightarrow \text{contiene al vector normal del plano } \pi \end{cases}$

π' quedará determinado por: $\begin{cases} A(2,2,2) \\ \vec{v}_r(-1,1,-1) \\ \vec{n}_\pi(3,-4,-8) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & -8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8(x-2)+(y-2)(-3)+4(z-2)-3(z-2)-4(x-2)-8(y-2)=$$

$$=0 \Rightarrow -12(x-2)-11(y-2)+z-2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -12x+24-11y+22+z-2=0 \Rightarrow -12x-11y+z+44=0$$

EC. DEL PLANO PEDIDO

4 Con el objetivo de llevar a cabo el ~~control~~ proceso de control de calidad de las arandelas, estas se organizan en lotes de 20 arandelas. Si la probabilidad de que una arandela sea defectuosa es de 0'01 y las arandelas se pueden considerar independientes entre sí.

a) Determinar si la probabilidad de encontrar en un lote 1 o 2 arandelas defectuosas es mayor ~~que~~ del 20%

b) Si un lote se rechaza cuando se encuentra al menos una arandela defectuosa, ¿cual es la probabilidad de rechazar un lote?

c) ¿Cuál es el número esperado de arandelas sin defectos si el lote fuera de 200 arandelas?

a)

Variable aleatoria: $X \equiv$ "Número de arandelas defectuosas"

Distribución Binomial: $B(20, 0'01)$ y $q = 1-p = 0'99$

La probabilidad de encontrar en un lote 1 ó 2 arandelas defectuosas es $P(X \leq 2) =$

$$= P(X=1) + P(X=2) = \binom{20}{1} 0'01^1 0'99^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0'01^2 \cdot 0'99^{18} =$$

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} \qquad P(X=n) = \binom{20}{n} p^n \cdot q^{20-n}$$

$$= \frac{20!}{1!\,19!} 0'01 \cdot 0'99^{19} + \frac{20!}{2!\,18!} 0'01^2 \cdot 0'99^{18} =$$

$$= \frac{20 \cdot \cancel{19!}}{\cancel{19!}} 0'01 \cdot 0'99^{18} + \frac{20 \cdot 19 \cdot \cancel{18!}}{2 \cdot \cancel{18!}} \cdot 0'01^2 \cdot 0'99^{18} =$$

$$= 0'1652 + 0'0158 = 0'181$$, en porcentaje: 18'1%

"NO ES CIERTO QUE LA PROBABILIDAD DE ENCONTRAR EN UN LOTE 1 Ó 2 ARANDELAS DEFECTUOSAS SEA MAYOR QUE UN 20%"; pues es un 18'1%.

(b) La probabilidad de que se rechace un lote será $P(X>0) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{20}{0} 0'01^0 \cdot 0'99^{20} =$

$= 1 - 0'818 = \underline{0'182}$ " $18'2\%$

(c) Se define $Y \equiv$ "Número de arandelas sin defectos"

Distribución Binomial $B(\underset{n}{200}, \underset{p}{0'99})$

$E = 200 \cdot 0'99 = \underline{198}$.

Esperanza en $B(n, p)$ es "$n \cdot p$"