EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2020–2021

Distrito Universitario de Canarias

MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	**(3)**
Convocatoria:	

Instrucciones:

- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas entre las parejas 1A-1B, 2A-2B, 3A-3B y 4A-4B, correspondientes a cada uno de los bloques de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque de contenido, se considerará sólo la primera pregunta respondida de ese bloque.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Criterios de calificación

A) Se valorará todo lo escrito en cada respuesta y no sólo el resultado final.

B) En las respuestas se corregirán los desarrollos necesarios y también las explicaciones breves de los mismos.

C) Cada error cometido en una respuesta resta calificación en función de la importancia de dicho error, pero no repercute en lo que se haya hecho después, mientras lo realizado sea coherente con dicho error y tenga sentido matemático.

D) Se penalizará cada notación gravemente incorrecta, que indique desconocimiento de cuestiones importantes (por ejemplo, usar la notación de determinante cuando se trata de una matriz o viceversa, confundir coordenadas de vector o de punto).

E) Cuando sea necesario representar gráficamente una función, dicha representación deberá basarse en características importantes de la misma, que deberá obtener previamente, aunque en el enunciado de la pregunta esto no se haya pedido de forma explícita.

F) Cuando haya que representar gráficamente una región plana, sea limitada por rectas, sea limitada por curvas y rectas, o sea limitada por varias curvas, no sólo habrá que representar correctamente los segmentos o arcos que intervengan (según apartado E), sino que habrá que calcular los puntos de corte entre ambas gráficas, si dichos puntos están relacionados con la región pedida. Se dará cada uno de esos puntos con sus dos coordenadas, aunque no se pida explícitamente.

G) Cuando se piden abscisas basta con la coordenada x. Cuando se piden puntos deben dar las dos coordenadas.

H) Los rangos de las matrices hay que justificarlos (puede hacerse por la técnica de menores orlados o reduciendo la matriz a una escalonada por filas equivalentes)

I) En respuestas sobre geometría del espacio, no basta escribir una ecuación pedida (o que se necesite para otro resultado), sino que se requiere una explicación mínima de lo que significa geométricamente y de dónde provienen los números que aparecen en esta como coeficiente. Igualmente, cuando se trata de varias ecuaciones simultáneas (ecuaciones de una recta o ecuaciones paramétricas de un plano).

J) Los cálculos intermedios hay que hacerlos siempre en forma exacta (se observa que algunos alumnos, desde el principio de una respuesta, sustituyen algún valor por una mala aproximación decimal, con la cual operan dando por bueno el resultado final obtenido, que suele estar muy alejado del resultado correcto). Así uno de los objetivos a evaluar es una operatoria adecuada y que conozcan el uso correcto de los números que deben utilizar según el contexto de trabajo.

K) Se exige utilizar correctamente los signos de igualdad y de aproximación.

L) En los cálculos de probabilidad donde se proceda a realizar la aproximación de la distribución binomial por la distribución normal se debe justificar que el procedimiento se puede hacer.

M) En los problemas de probabilidad se debe indicar el teorema que se utiliza para realizar el cálculo de la probabilidad.

N) Los problemas de probabilidad que utilicen la Distribución Binomial, deberán escribir la fórmula de cálculo de la probabilidad.

SE PROPONE UNA SOLUCIÓN CORRECTA. OTRAS SOLUCIONES CORRECTAS TAMBIÉN SE ACEPTAN

Bloque 1.- Análisis

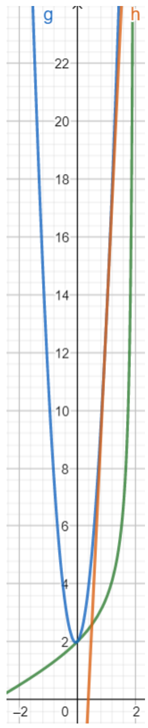
1A. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+a}{2x-4} & x \leq 0 \\ 10x^2 + x + b & x > 0 \end{cases}$

Calcular los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ sea continua y derivable en $\mathbb{R}$. 2.5 ptos

Dar las expresiones de la función $f(x)$ y de su derivada $f'(x)$.

Solución

Para que la función sea derivable en todo su dominio ha de ser también continua, por lo que en primer lugar se estudia la continuidad. En x<0 f(x) es continua pues las funciones racionales son continuas si lo son tanto la función del denominador como la del numerador y el denominador no se anula, condiciones que se cumplen en esta ocasión. El numerador es una función polinómica y el denominador se anula para x = 2, que está fuera del intervalo. En x>0 f(x) es continua pues se trata de una función polinómica.



Estudio de la continuidad en x=0:

f(0) = -a/4

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+a}{2x-4} = -\frac{a}{4} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 10x^2 + x + b = b$$

Para que la función sea continua sea ha de cumplir por tanto que $\boldsymbol{a = -4b}$

Por otra parte, derivando:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x(2x-4) - 2\cdot(x^2+a)}{(2x-4)^2} = \dfrac{2x^2-8x-2a}{4x^2-16x+16} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^2-4x-a}{x^2-4x+4} & x < 0 \\ 20x+1 & x > 0 \end{cases}$$

$f'(0^-) = \frac{-2a}{16} = -\frac{a}{8}$ $\;y\;$ $f'(0^+) = 1$ Por lo que $\boldsymbol{a = -8}$ y $\boldsymbol{b = 2}$ →

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-8}{2x-4} & x \leq 0 \\ 10x^2 + x + 2 & x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-8x+16}{(2x-4)^2} = 2\cdot\dfrac{x^2-4x+8}{x^2-4x+4} & x < 0 \\ 20x+1 & x > 0 \end{cases}$$

1B. Dadas las funciones: $f(x) = x^2 - 4x$; $g(x) = 4 - 4x$

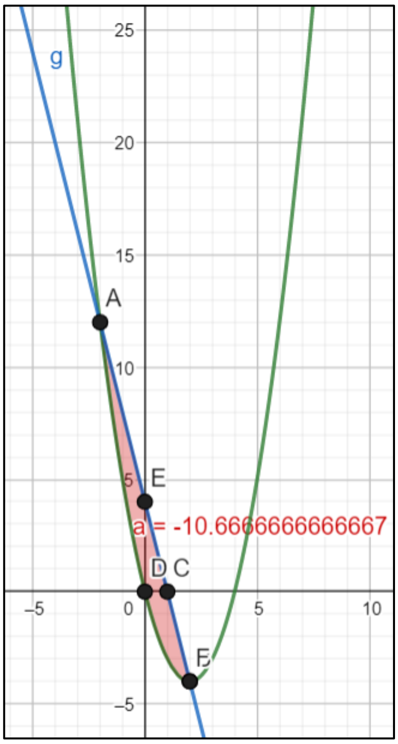
a) Esboce el gráfico del recinto limitado por las funciones $f(x)$ y $g(x)$ 1.25 ptos

b) Determinar el área del recinto limitado por las funciones $f(x)$ y $g(x)$ 1.25 ptos

Solución

a.

Se igualan las funciones para determinar los puntos de corte:



$$f(x) = g(x) \rightarrow x^2 - 4x = 4 - 4x$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x = \mp 2$$

Los puntos de corte de $f(x)$ y $g(x)$ son: A(-2,12) y B(2,-4)

Los puntos de corte con los ejes son:

<u>Eje X</u>

$$f(x) = x^2 - 4x = 0$$
$$x = 0 \text{ o } x = 4$$
$$(0,0) \text{ y } (4,0)$$
$$g(x) = 4 - 4x = 0$$
$$x = 1 \rightarrow C(1,0)$$

<u>Eje Y</u>

$$f(x) \rightarrow D(0,0)$$
$$g(x) \rightarrow E(0,4)$$

El vértice de la parábola se encuentra, derivando (2x-4 = 0) en x=2 → F(2,-4), que coincide con uno de los puntos de corte de f(x) y g(x). En el esbozo de la función se ha de ver claramente que el vértice coincide con el punto de corte.

b.

Como en el recinto los valores de *g(x)* son superiores a los de *f(x):*

$$\int_{-2}^{2} (g(x) - f(x))dx = \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)dx = \left[\frac{-x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \frac{-8}{3} + 8 - \left(\frac{8}{3} - 8\right) = 16 - \frac{16}{3} = \boldsymbol{\frac{32}{3} u^2}$$

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

a) Sea la matriz $M = A + c \cdot B$, donde c es un número real cualquiera. Calcular los valores de c de forma que el rango (M) = 1 — 1 pto

b) Sea la matriz $D = A^2 + B \cdot A$. Averiguar la matriz X que cumple la siguiente ecuación matricial: $D \cdot X = -30 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ — 1.5 pto

Solución

a.

Calculamos la matriz

$M = A + cB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+c & -1 \\ 4+4c & 2-c \end{pmatrix}$

Calculamos su determinante:

$\det(M) = \begin{vmatrix} 1+c & -1 \\ 4+4c & 2-c \end{vmatrix} = -c^2 + 5c + 6$

Rang (M) = 1 si $\det(M) = 0$,

Los valores de *c* que anulan el determinante: *c* = -1 y *c* = 6 → Rang (M) = 1

b.

$$D \cdot X = -30 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow X = -30 \cdot D^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Es necesario calcular la matriz inversa de B:

$D = A^2 + B \cdot A = (A + B) \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$

$Otra\ forma\ de\ hacerlo$:

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

$D = A^2 + B \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$

Calculamos la inversa de la matriz D anterior,

Determinante: $|D|$ = 12 + 48 = 60 (distinto de cero)

$Adj(D) = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}^{t} = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -12 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/10 & 1/15 \\ -1/5 & -1/30 \end{pmatrix}$

Por tanto, la matriz que buscamos es:

$$X = -30 \cdot D^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = -30 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{15} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 12 & 7 & 22 \end{pmatrix}$$

2B. En la liga Mate-Basket, las mujeres matemáticas con mayor puntuación son: Lovelace, Noerther y Germain. Las tres acumulan 17500 puntos. Además, lo que ha anotado Germain más 2500 puntos es equivalente a la mitad de lo anotado por Lovelace. Finalmente, Noerther anotó el doble que Germain. Escriba el ranking de puntuaciones de la liga Mate-Basket de las jugadoras Lovelace, Noerther y Germain. 2.5 ptos

x: Puntos de Lovelace

y: Puntos de Noerther

z: Puntos de Germain

Solución, mediante el método de Gauss:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=17500 \\ z+2500=\dfrac{x}{2} \\ y=2z \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3z=17500 \\ x-2z=5000 \end{array}\right\} \rightarrow 5z=12500 \rightarrow z=2500$$

$$y=2z=5000$$

$$x=17500-y-z=17500-5000-2500=10000$$

La solución será: $(x, y, z) = (10000, 5000, 2500)$

El ranking de puntuaciones será:

- Lovelace: 10000 puntos.
- Noerther: 5000 puntos.
- Germain: 2500 puntos.

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. Dadas las siguientes ecuaciones en el espacio tridimensional:

$$r: 5 - x = y - 3 = 5 - z$$

$$\pi: 3x - 4y - 8z + 35 = 0$$

a) Comprobar que la recta r y el plano π se cortan en un punto. 1.5 ptos
Averiguar dicho punto

b) Calcular la ecuación del plano que pasa por el punto $A\,(2, 2, 2)$, paralelo a la recta r, y perpendicular al plano π 1. pto

Solución:

a) Escribimos la recta como intersección de dos planos:

$$r: \begin{cases} 5 - x = y - 3 \\ y - 3 = 5 - z \end{cases} \quad r: \begin{cases} x + y = 8 \\ y + z = 8 \end{cases}$$

Analizamos el sistema formado por las tres ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ y + z = 8 \\ 3x - 4y - 8z = -35 \end{cases}$$

Estudiamos el rango de las matrices A y A*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & -4 & -8 & -35 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & -8 \end{vmatrix} = -8 + 0 + 3 - 0 + 4 + 0 = -1 \neq 0$$

Rango de A=Rango A*=3, por lo que el sistema es compatible determinado y tiene una única solución, lo que significa que se cortan en un punto.

Por otra parte, de la ecuación de la recta se deduce: $x = 8 - y,\ \ z = 8 - y$. Sustituyendo en la ecuación del plano:

$$3(8 - y) - 4y - 8(8 - y) = -35 \rightarrow 24 - 3y - 4y - 64 + 8y = -35$$

$y = 5$, por lo que $x = 3$ y $z = 3$**. El punto de corte es P(3,5,3)**

b) Como se trata de plano paralelo a la recta r, debe contener el mismo vector director: $\vec{u}_r = (-1, 1, -1)$.

Si es perpendicular al plano, el nuevo plano deberá contener el vector normal de π:

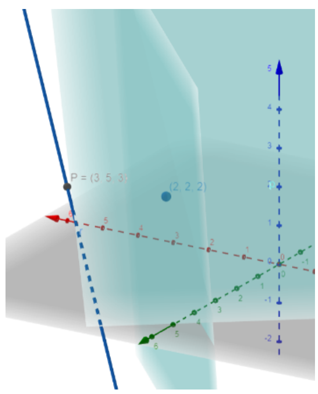
n(3,-4,-8). Y pasa por el punto (2, 2, 2), por tanto la ecuación del plano viene dada por:

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - 2 & z - 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

$$-8(x - 2) + 4(z - 2) - 3(y - 2) - 3(z - 2) - 8(y - 2) - 4(x - 2) = 0$$

$$-12(x - 2) - 11(y - 2) + (z - 2) = 0$$

$$-12x - 11y + z + 44 = 0$$



3B. Dado el plano $\pi: -x+3y+2z+5=0$

y las rectas secantes $r: \frac{x-5}{2} = y+2 = 1-z$ y $s: \frac{x+1}{6} = \frac{y}{-2} = z$

a) Sea *A* el punto de intersección de las rectas r y s. 1.5 ptos

Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular al plano π y que pasa por *A*.

b) Calcular el ángulo que forman las rectas r y s. 1 pto

Solución:

a) Como la recta a encontrar es perpendicular al plano, el vector $\vec{n} = (-1,3,2)$ será un vector de la recta buscada.

Calculamos el punto de intersección de las rectas pasándolas a forma implícita y resolviendo el sistema que determinan.

Recta r:

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{1} \Rightarrow x-5 = 2y+4 \Rightarrow x-2y=9$$

$$\frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow -y-2 = z-1 \Rightarrow y+z=-1$$

Recta s:

$$\frac{x+1}{6} = \frac{y}{-2} \Rightarrow -2x-2 = 6y \Rightarrow 2x+6y=-2$$

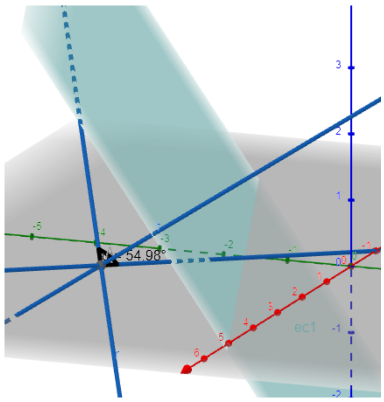
$$\frac{y}{-2} = \frac{z}{1} \Rightarrow y=-2z \Rightarrow y+2z=0$$

Resolvemos el sistema formado por las 4 ecuaciones:

$$\begin{cases} x-2y=9 \\ y+z=-1 \\ 2x+6y=-2 \\ y+2z=0 \end{cases}$$ Lo resolvemos por el Método de Gauss:

$$M^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=2F_1-F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -10 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_3=10F_2+F_3 \\ F_4=F_2-F_4}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4=F_3+10F_4]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x-2y=9 & (I) \\ y+z=-1 & (II) \\ 10z=10 & (III) \end{cases}$$



De (III): $z=1$

Al sustituir en (II): $y+1=-1 \Rightarrow y=-2$

Al sustituir en (I): $x+4=9 \Rightarrow x=5$

Por lo que el punto de intersección de las rectas será $P=(5,-2,1)$. La recta buscada será la que pasa por $P=(5,-2,1)$ y tiene como vector director $(-1,3,2)$:

$$\begin{cases} x=5-\lambda \\ y=-2+3\lambda \ , \quad \lambda \in R \\ z=1+2\lambda \end{cases}$$

B) Para buscar el ángulo que forman las rectas r y s, tomamos los vectores directores de las rectas y calculamos el ángulo que forman.

$\vec{v}_r = (2,1,-1)$

$\vec{v}_s = (6,-2,1)$

$$\alpha = \arccos\frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s|} = arccos\frac{|12-2-1|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{41}} = 54{,}98°$$

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. Con el objetivo de llevar a cabo el proceso de control de calidad de las arandelas, estas se organizan en lotes de 20 arandelas. Si la probabilidad de que una arandela sea defectuosa es de 0.01 y las arandelas se pueden considerar independientes entre sí:

a) Determinar si la probabilidad de encontrar en un lote 1 o 2 arandelas defectuosas es mayor del 20% 1.25 ptos

b) Si un lote se rechaza cuando se encuentra al menos una arandela defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de rechazar el lote? 0.75 ptos

c) ¿Cuál es el número esperado de arandelas sin defectos si el lote fuera de 200 arandelas? 0.5 ptos

Solución

a)

Se define la variable aleatoria X: "Número de arandelas defectuosas".

X se aproxima por una binomial B (20, 0.01)

La probabilidad de encontrar en un lote entre 1 y 2 arandelas defectuosas se define de la siguiente forma:

$$P(1 \leq X \leq 2) = P(X = 1) + (X = 2)$$

$$P(1 \leq X \leq 2) = \binom{20}{1} 0.01^1 \cdot (1 - 0.01)^{19} + \binom{20}{2} 0.01^2 \cdot (1 - 0.01)^{18}$$

$$P(1 \leq X \leq 2) = 0.1652 + 0.0158 = 0.181 = 18.1\%$$

La probabilidad de encontrar en un lote entre 1 y 2 arandelas defectuosas es del 18.1 % por lo que **NO es mayor del 20%.**

b)

Se define el suceso R: "Rechazar el lote".
Se define la ocurrencia del suceso R de la siguiente forma:

$$P(R) = P(X > 0) = 1 - P(X = 0)$$

$$P(X = 0) = \binom{20}{0} 0.01^0 \cdot (1 - 0.01)^{20} = 0.818$$

$$P(R) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.818 = 0.182$$

c)

Se define la variable aleatoria Y: "Número de arandelas sin defectos".

Y se aproxima por una binomial B (200, 0.99)

El número esperado de arandelas sin defectos sería de 200·0.99 = 198

4B. Suponiendo que el tiempo de espera en la cola de correos sigue una distribución normal de media 7'5 minutos con 2 minutos de desviación típica.

a) Hallar el porcentaje de personas que esperan más de 9 minutos. 1.25 ptos

b) Correos afirma que: "Menos del 40% de las personas que acuden a Correos esperan entre 7 y 10 minutos". ¿Es correcta la afirmación? 1.25 ptos

Solución

a)

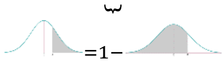
Sea $X \equiv tiempo\ de\ espera\ en\ correos$

Sabemos que: $X \sim N(7'5, 2)$

Por lo que: $Z = \frac{X - 7'5}{2} \sim N(0,1)$

P(más de 9 minutos) = $P(X \geq 9) \underbrace{=}_{Tipificando} P\left(Z \geq \frac{9-7'5}{2}\right) =$

$= P(Z \geq 0'75) \underbrace{=} 1 - P(Z \leq 0'75) \underbrace{=}_{\text{tabla}} 1 - 0'7734 = 0,2266 \rightarrow 22'66\%$



b)

$P(7 \leq X \leq 10) \underbrace{=}_{Tipificando} P\left(\frac{7 - 7'5}{2} \leq Z \leq \frac{10 - 7'5}{2}\right) =$

$= P(-0'25 \leq Z \leq 1'25) \underbrace{=} P(Z \leq 1'25) - P(Z \leq -0'25) =$

$= P(Z \leq 1'25) - P(Z > 0'25) = P(Z \leq 1'25) - [1 - P(Z \leq 0'25)] \underbrace{=}_{tabla}$

$= 0'8944 - (1 - 0'5987) = 0'4931 \rightarrow 49'31\%$

Un 49.31% de las personas que acuden a Correos esperan entre 7 y 10 minutos, por lo que la afirmación es por tanto incorrecta.