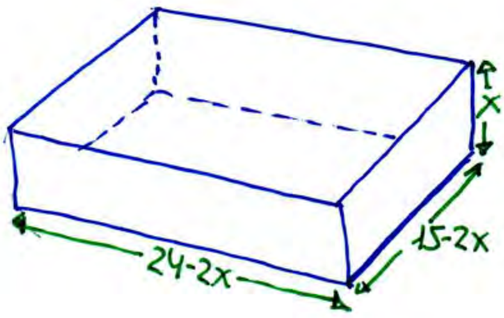
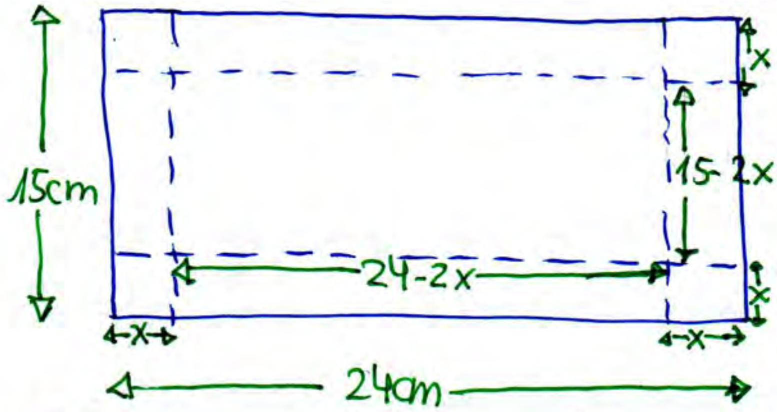
1 Se desea construir una caja sin tapa superior. Para ello se usa una lámina de cartón de 15cm de ancho por 24cm de largo, doblándola convenientemente despues de recortar un cuadrado de iguales dimensiones en cada una de sus esquinas.

Se determina como requisito que la caja a construir contenga el mayor volumen posible. Indicar cuales son las dimensiones de la caja y su volumen máximo.

—— o ——





Las dimensiones de la caja, una vez quitados los cuadrados de lado "x" de las esquinas, serán: $(24-2x)$, $(15-2x)$ y x ; luego su volumen será:

$V=(24-2x)\cdot(15-2x)\cdot x \Rightarrow$ La función a optimizar es:

$$f(x)=(24-2x)(15-2x)\cdot x \Rightarrow f(x)=(24-2x)(15x-2x^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=360x-48x^2-30x^2+4x^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{f(x)=4x^3-78x^2+360x}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 15 \\ \hline 120 \\ 24\ \\ \hline 360 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 78 \\ \times 2 \\ \hline 156 \end{array}$$

Busquemos maximos/mínimos

$f'(x)=12x^2-156x+360$; imponemos: $f'(x)=0 \Rightarrow$

⇒ $12x^2-156x+360=0$ ⇒ (Simplificamos para agilizar los cálculos) $x^2-13x+30=0$

$$x=\frac{13\pm\sqrt{13^2-4\cdot 1\cdot 30}}{2}=\frac{13\pm\sqrt{169-120}}{2}=$$

$$=\frac{13\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{13\pm 7}{2}=\begin{cases}\frac{13+7}{2}=\underline{10}\\ \frac{13-7}{2}=\frac{6}{2}=\underline{3}\end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 13\\ \times 13\\ \hline 39\\ 13\ \\ \hline 169\end{array}\qquad \begin{array}{r|l} 156 & 12\\ 36 & 13\\ 0 & \end{array}\qquad \begin{array}{r|l} 360 & 12\\ 00 & 30\end{array}$$

Comprobamos si es posible $x_1=10$, las dimensiones de la caja quedarán $\begin{cases}24-2\cdot 10=4\\ 15-2\cdot 10=-5\ \nexists\end{cases}$ ⇒ $x_1=10$ NO ES VÁLIDO

DIMENSIÓN NO PUEDE SER<0

Nos queda $x_2=3$, comprobemos las dimensiones

$\begin{cases}24-2\cdot 3=18\\ 15-2\cdot 3=9\\ 3\end{cases}$ ⇒ $x_2=3$ es una solución válida

Comprobamos que se trate de un máximo:

$f''(x)=24x-156$ y $f''(3)=24\cdot 3-156=62-156=-94<0$

⇒ se trata de un máximo!!

$$\begin{array}{r} 156\\ -62\\ \hline 94\end{array}$$

Dimensiones de la caja con volumen maximo $\begin{cases}\underline{18cm}\\ \underline{9\ cm}\\ \underline{3cm}\end{cases}$

Volumen $V=18\cdot 9\cdot 3=486\ cm^3$

2 Un granjero compra un determinado mes 274€ de pienso para su ganado. Con ese dinero ha comprado un total de 66 sacos de pienso de tres marcas diferentes: A, B y C. Se sabe que el precio de cada marca de pienso que ha comprado es de: 5€, 4€ y 4€, respectivamente. También se sabe que el número de sacos adquiridos de la marca C es el doble que el total de sacos comprados de las marcas A y B juntos. Averiguar la cantidad de sacos que el granjero ha comprado de cada una de las tres marcas.

* * *

	MARCA A	MARCA B	MARCA C	TOTAL
SACOS	x	y	z	66
PRECIO	5€	4€	4€	274

$\rightsquigarrow x+y+z=66$

$\rightsquigarrow 5x+4y+4z=274$

Además "El número de sacos de marca C es el doble que los adquiridos de marca A y B juntos"

$$\Rightarrow z=2(x+y) \Rightarrow z=2x+2y \Rightarrow 2x+2y-z=0$$

Montamos el sistema a resolver:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=66 \\ 5x+4y+4z=274 \\ 2x+2y-z=0 \end{array}\right\} \equiv \underbrace{\left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{array}}_{A} \middle| \begin{array}{c} 66 \\ 274 \\ 0 \end{array}\right)}_{A^*}$$

si $|A| \neq 0$, podemos aplicar Cramer!!

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4+8+10-8-8+5 = 3 \neq 0 \text{ Perfecto!!}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 66 & 1 & 1 \\ 274 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-264+548+274-528}{3} = \frac{30}{3} = 10 \quad ,, \quad \boxed{X=10}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 66 & 1 \\ 5 & 274 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-274+528-548+330}{3} = 12 \quad ,, \quad \boxed{y=12}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 66 \\ 5 & 4 & 274 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{548+660-528-548}{3} = \frac{132}{3} = 44 \quad ,, \quad \boxed{z=44}$$

Sol: 10 sacos de marca A, 12 sacos de marca B y 44 sacos de marca C.

Otra forma, triangulerizando la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 66 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 4 & 274 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-5F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 66 \\ 0 & 0 & -3 & -132 \\ 0 & -1 & -1 & -56 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2\to F_3 \\ F_3\to F_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 66 \\ 0 & 1 & 1 & 56 \\ 0 & 0 & 3 & 132 \end{array}\right)$$

...y convertimos la matriz en ecuaciones:

F_3: $3z = 132 \Rightarrow z = \frac{132}{3} = 44 \Rightarrow \boxed{z=44}$

F_2: $y + z = 56,\ z=44 \Rightarrow y = 56-44 \Rightarrow \boxed{y=12}$

F_1: $x+y+z=66,\ y=12\ \ z=44 \Rightarrow x = 66-12-44 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 66-56 \Rightarrow \boxed{x=10}$

3 Dadas las ecuaciones de los planos

$$\pi_1: 2x+3y-z=9 \quad y \quad \pi_2: \begin{cases} x = 1+\lambda+\mu \\ y = -2-\lambda+2\mu \\ z = 3+3\lambda-\mu \end{cases}$$

ⓐ Hallar la ecuación de la recta paralela a los planos π_1 y π_2 que pase por el punto medio del segmento cuyos extremos son $A(1,-1,0)$ y $B(-1,-3,2)$.

ⓑ Calcular el ángulo formado por los planos π_1 y π_2.

—o—

ⓐ Para determinar una recta necesitamos:

$$r \equiv \begin{cases} P(p_1,p_2,p_3) \\ \vec{v_r}(v_1,v_2,v_3) \\ \text{vector director} \end{cases}$$ y su ecuación contínua será:

$$\frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2} = \frac{z-p_3}{v_3}$$

⇝ Cálculo del punto medio del segmento $\overline{AB}$, si $A(a_1,a_2,a_3)$ y $B(b_1,b_2,b_3)$: $M\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right)$

luego $P\left(\frac{1+(-1)}{2}, \frac{(-1)+(-3)}{2}, \frac{0+2}{2}\right) \Rightarrow P(0,-2,1)$.

⇝ Calculo del vector director de la recta r

El producto vectorial de los vectores normales de π_1 y π_2, será el vector director de la recta r pedida ($r \parallel \pi_1$ y $r \parallel \pi_2$)

• Vector normal de $\pi_1 \equiv 2x+3y-z=9$

Recordar que si la ecuación es $Ax+By+Cz+D=0$, el vector normal es (A,B,C) luego: $\vec{n}_{\pi_1}(2,3,-1)$

• Vector normal de $\pi_2 \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda+\mu \\ y = -2-\lambda+2\mu \\ z = 3+3\lambda-\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(1,-2,3) \\ \vec{v}_1(1,-1,3) \\ \vec{v}_2(1,2,-1) \end{cases}$

De la ecuación paramétrica de π_2, extraemos

El vector normal de π_2: $\vec{n}_{\pi_2} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$

$$\vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} = -5\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k} \Rightarrow \vec{n}_{\pi_2}(-5,4,3)$$

Como $\vec{v}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ -5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}\vec{k} = 13\vec{i} - \vec{j} + 23\vec{k}$

Entonces la recta pedida

$$r \begin{cases} P(0,-2,1) \\ \vec{v}_r(13,-1,23) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 0+13\lambda \\ y = -2-\lambda \\ z = 1+23\lambda \end{cases}$$

ECUACIÓN PARAMÉTRICA

y la ECUACIÓN CONTÍNUA: $\dfrac{x-0}{13} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-1}{23}$

ⓑ El ángulo determinado por π_1 y π_2

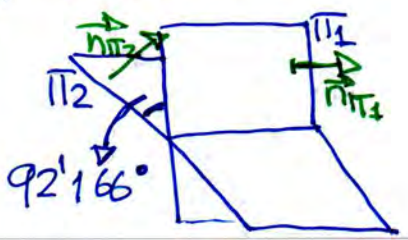
$$(\widehat{\pi_1, \pi_2}) = (\widehat{\vec{n}_{\pi_1}, \vec{n}_{\pi_2}}) = \arccos\left(\frac{\vec{n}_{\pi_1}\cdot\vec{n}_{\pi_2}}{|\vec{n}_{\pi_1}|\cdot|\vec{n}_{\pi_2}|}\right) = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{50}}\right)$$

$= 92'166°$

NOTAS:

$\vec{n}_{\pi_1}\cdot\vec{n}_{\pi_2} = (2,3,-1)\cdot(-5,4,3) = 2\cdot(-5)+3\cdot 4+(-1)\cdot 3 = -1$

$|\vec{n}_{\pi_1}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$ „ $|\vec{n}_{\pi_2}| = \sqrt{25+16+9} = \sqrt{50}$



4 Se ha comprobado que, al aplicar un determinado medicamento, la probabilidad de que elimine el acné a un paciente es del 80%. Suponiendo independencia de sucesos.

ⓐ Si se toman 100 pacientes, ¿Cual es la probabilidad de que el medicamento actue con más de 75 pacientes.

ⓑ Si se lo toman 225 pacientes ¿Cuál es la probabilidad de que el medicamento actue entre 170 y 190 pacientes?

ⓒ ¿Cuál es el número esperado de pacientes sobre los que NO se eliminará el acné si se toman el medicamento 500 pacientes?

* * *

ⓐ Distribución Binomial $B(n, p)$

$B(100, 0'8)$, donde
- $p \equiv$ probabilidad del suceso eliminar acné
- $n \equiv$ número de pacientes

$$P(X>75)=P(X=76)+P(X=77)+\dots+P(X=100)$$

Vemos si podemos aplicar la aproximación de la distribución Binomial a Normal:

$$B(n,p) \sim N(\mu, r) \text{ con } \mu = n\cdot p \text{ y } r=\sqrt{n\cdot p\cdot q} \quad \| \quad \mu = 100\cdot 0'8 = 80, \; r=\sqrt{100\cdot 0'8\cdot 0'2}=4$$

vemos que $\left.\begin{array}{l} n\cdot p = 100\cdot 0'8 = 80 \geq 5 \\ \text{y } n\cdot q = 100\cdot 0'2 = 20 \geq 5 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Podemos aplicar la aproximación

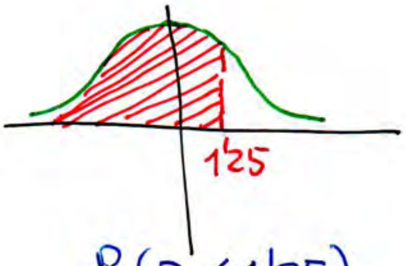
Estudiamos sobre $N(80, 4)$ y tipificamos

$$P(X>75) = 1-P(X\leq 75) = 1-P\left(Z\leq \frac{75-80}{4}\right) =$$

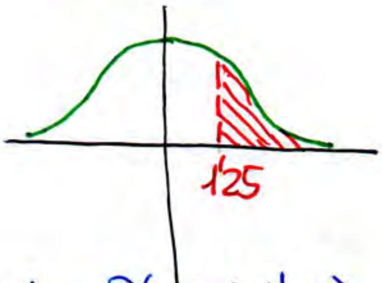
$$= 1-P(Z\leq -1'25) = 1-P(Z>1'25) =$$

$= 1 - \left(1 - P(Z \le 1'25)\right) = P(Z \le 1'25) = \underline{0'8944}$ ✓

$P(Z < -1'25)$



$P(Z \le 1'25)$



$1 - P(Z \le 1'25)$

b) $\left\{\begin{array}{l} n = 225 \\ p = 0'8 \\ q = 0'2 \end{array}\right\} \; B(225, 0'8)$

$P(170 \le X \le 190) = P(X \le 190) - P(X \le 170)$

Veamos si podemos aproximarnos a distribución normal: $\left\{\begin{array}{l} n \cdot p = 225 \cdot 0'8 = 180 > 5 \\ n \cdot q = 225 \cdot 0'2 = 45 > 5 \end{array}\right\}$ la distribución normal será $N(\mu, \sigma)$, donde $\mu = 225 \cdot 0'8 = 180$ y $\sigma = \sqrt{225 \cdot 0'8 \cdot 0'2} = 6$, luego $N(180, 6)$ y tipificamos

$$P(X \le 190) - P(X \le 170) = P\left(Z \le \frac{190-180}{6}\right) - P\left(Z \le \frac{170-180}{6}\right) =$$
$$= P\left(Z \le \frac{10}{6}\right) - P\left(Z \le \frac{-10}{6}\right) = P(Z \le 1'67) - P(Z \le -1'67) =$$
$$= P(Z \le 1'67) - \left(1 - P(Z \le 1'67)\right) = P(Z \le 1'67) - 1 + P(Z \le 1'67) =$$
$$= 2 \cdot P(Z \le 1'67) - 1 = 2 \cdot 0'9525 - 1 = \underline{0'905}$$ ✓

c) $n = 500$ pacientes, como $p = 0'8 \Rightarrow q = 0'2$ es la probabilidad de que los pacientes no eliminen el acné con la medicación administrada.

$E = n \cdot q = 500 \cdot 0'2 = \underline{100}$ ✓

<u>De entre 500 pacientes el número esperado de pacientes sobre los que el medicamento no funciona es 100.</u>