1 Dada la función $f(x)=\frac{ax^2-2}{b-x}$, donde a y b son dos parámetros con valores reales.

a Calcular los valores de los parámetros a y b que verifican que $f(-2)=2$ y que $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}\setminus\{5\}$.

Escribir la función resultante $f(x)$ y calcular su derivada $f'(x)$.

b Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la función $f(x)$ si los parámetros toman los valores $a=-1$ y $b=-3$.

---

a $1^a \Rightarrow f(-2)=2 \Rightarrow \frac{a(-2)^2-2}{b-(-2)}=2 \Rightarrow 4a-2=2(b+2)$

$\Rightarrow 4a-2b=6 \Rightarrow \boxed{2a-b=3}$ PREMISA 1ª

$2^a \Rightarrow f(x)$ es continua en $\mathbb{R}\setminus\{5\}$ y

$f(x)=\frac{ax^2-2}{b-x}$, tiene un punto de discontinuidad cuando el denominador se hace cero

$b-x=0 \Rightarrow x=b \equiv$ Continua en $\mathbb{R}\setminus\{b\}$, luego

$\boxed{b=5}$ PREMISA 2ª

Para que se cumplan las dos premisas, debemos forzar $\left\{\begin{array}{l} 2a-b=3 \\ \boxed{b=5} \end{array}\right\} \Rightarrow 2a-5=3 \Rightarrow 2a=8 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a=4}$

Los valores de los parámetros reales que cumplen el enunciado son: $a=4$ y $b=5$ ✓

$\left.\begin{array}{l} a=4 \\ b=5 \end{array}\right\}$ con $f(x)=\dfrac{ax^2-2}{b-x} \Rightarrow f(x)=\dfrac{4x^2-2}{5-x}$

Su derivada será la derivada de un cociente:

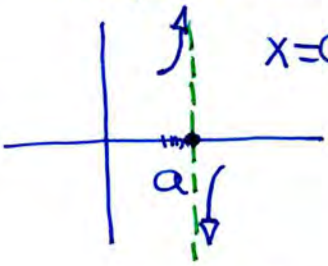
$$f'(x)=\frac{(4x^2-2)'\cdot(5-x)-(4x^2-2)(5-x)'}{(5-x)^2}=\frac{8x(5-x)+4x^2-2}{(5-x)^2}=$$

$$=\frac{40x-8x^2+4x^2-2}{(5-x)^2}=\frac{-4x^2+40x-2}{(5-x)^2}$$

b) $\left.\begin{array}{l} a=-1 \\ b=-3 \end{array}\right\}$ con $f(x)=\dfrac{ax^2-2}{b-x} \Rightarrow f(x)=\dfrac{-x^2-2}{-3-x}=\dfrac{-(x^2+2)}{-(3+x)} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{x^2+2}{3+x}$

⇝ ASÍNTOTA VERTICAL:



$x=a$, donde: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$

Como $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2}{3+x}=+\infty \Rightarrow \underline{x=-3}$

⇝ ASÍNTOTA OBLICUA:

$y=mx+n$, donde: $\left\{\begin{array}{l} m=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right) \\ \text{si } m\neq 0 \\ n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right) \end{array}\right.$

Calculemos!!

dividir = multiplicar por inverso

$$m=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x^2+2}{3+x}}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{3+x}:x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{3+x}\cdot\frac{1}{x}\right)=$$

igual grado = cociente de coeficientes

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{3x+x^2}=\frac{1}{1}=1$$, Como $\boxed{m=1}$ no nulo!!

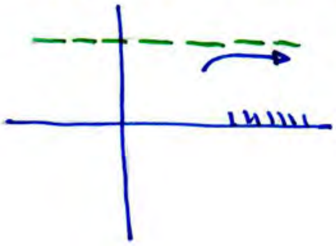
calculemos n:

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{3+x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{3+x}-\frac{x\cdot(3+x)}{3+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2-(3x+x^2)}{3+x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}+2-3x-\cancel{x^2}}{3+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x+2}{x+3}=-3 \qquad \boxed{n=-3}$$

La asíntota oblícua es $y = x - 3$

ASÍNTOTA HORIZONTAL



$y = b$, donde $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$

Veamos: $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+2}{x+3} = \infty \Rightarrow$ No existe asíntota horizontal!!

2 Calcular el valor de la matriz $M = X^2 - Y^2$, siendo X e Y las matrices que son solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

———o———

Llamamos $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

El sistema queda: $\begin{cases} 4X + 3Y = A \\ 2X + Y = B \end{cases}$,, usaremos el método de Reducción

$$\begin{array}{r|l} & 4\cancel{X} + 3Y = A \\ \times(-2) \rightarrow & -\cancel{4}X - 2Y = (-2)\cdot B \\ \hline & Y = A - 2\cdot B \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-6 & 8-8 \\ -3-2 & -1+2 \end{pmatrix} =$$

$$\Rightarrow Y = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Reducción

$$\begin{array}{r|l} & 4X + 3\cancel{Y} = A \\ \times(-3) \rightarrow & -6X - \cancel{3}Y = (-3)\cdot B \\ \hline & -2X = A - 3\cdot B \Rightarrow X = \frac{-1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\right] \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow X = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$, Calculemos M:

$$X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 4 + 2\cdot 3 & 4\cdot 2 + 2(-1) \\ 3\cdot 4 + (-1)\cdot 3 & 3\cdot 2 + (-1)(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$$

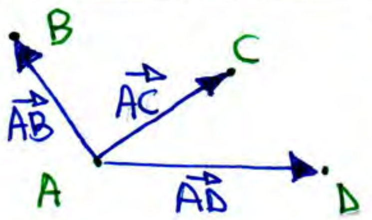
$$Y^2 = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 20 & 1 \end{pmatrix} \;,,\; X^2 - Y^2 = \begin{pmatrix} 22 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 20 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = X^2 - Y^2 = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -11 & 6 \end{pmatrix}$$ ✓

3 Dados los siguientes puntos en el espacio tridimensional: $A(0,-2,3)$, $B(1,-1,4)$, $C(2,3,3)$ y $D(4,5,5)$.

a Comprobar que los cuatro puntos son coplenarios. A continuación calcular la ecuación del plano que los contiene.

b Calcular la ecuación de la recta r, perpendicular al plano $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 3\mu \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 - 3\lambda - 3\mu \end{cases}$, que pasa por el punto A.



a Para demostrar que los puntos A, B, C y D son coplenarios ≡ (pertenecen a un mismo plano), elegimos cualquiera de ellos (por ejemplo A) y montamos $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ y $\vec{AD}$. Serán linealmente dependientes ⇒ la matriz formada por $\begin{pmatrix} \vec{AB} \\ \vec{AC} \\ \vec{AD} \end{pmatrix}$ tendrá rango 2 ⇒

⇒ Su determinante será cero!!

Recordemos que dados dos puntos: $P(p_1, p_2, p_3)$ y $Q(q_1, q_2, q_3)$: $\vec{PQ}(q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$, entonces:

$\vec{AB}(1,1,1)$, $\vec{AC}(2,5,0)$ y $\vec{AD}(4,7,2)$.

Veamos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot2 + 1\cdot0\cdot4 + 2\cdot7\cdot1 - 1\cdot5\cdot4 - 0\cdot7\cdot1 - 1\cdot2\cdot2 =$$

$= 10 + 0 + 14 - 20 - 0 - 4 = 24 - 24 = 0 \Rightarrow$ A, B, C y D son coplenarios!!

Para calcular la ecuación del plano que los contiene, basta pensar que quedaría determinado por: $\begin{cases} A(0,-2,3) \\ \vec{AB}\,(1,1,1) \\ \vec{AC}\,(2,5,0) \end{cases} \Bigg\} \begin{cases} x = 0 + 1\cdot\lambda + 2\cdot\mu \\ y = -2 + 1\cdot\lambda + 5\cdot\mu \\ z = 3 + 1\cdot\lambda + 0\cdot\mu \end{cases}$

ECUACIÓN PARAMÉTRICA

Recordar que un plano puede quedar determinado por un punto y dos vectores contenidos en el ó paralelos a él $\begin{cases} P(p_1,p_2,p_3) \\ \vec{u}(u_1,u_2,u_3) \\ \vec{v}(v_1,v_2,v_3) \end{cases} \Bigg\} \begin{cases} x = p_1 + \lambda u_1 + \mu \cdot v_1 \\ y = p_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = p_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$

ECUACIÓN PARAMÉTRICA.

$\Rightarrow$ Otra manera será determinarlo con un punto y un vector normal al plano $\begin{cases} P(p_1,p_2,p_3) \\ \vec{AB} \times \vec{AC} = \vec{n}_\pi \end{cases}$

PRODUCTO VECTORIAL

$\Rightarrow$ Otra forma, partiendo de la ecuación vectorial del plano determinado por un punto y dos vectores: $(x,y,z) = (p_1,p_2,p_3) + \lambda(u_1,u_2,u_3) + \mu(v_1,v_2,v_3)$

$\Rightarrow (x-p_1, y-p_2, z-p_3) = \lambda(u_1,u_2,u_3) + \mu(v_1,v_2,v_3) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Son combinación lineal $\equiv$ linealmente depend.

$\Rightarrow$ El determinante de sus componentes es cero!! $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-0 & y+2 & z-3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(y+2) + 5(z-3) - 2(z-3) - 5x = 0$$

$$\Rightarrow 2y + 4 + 3(z-3) - 5x = 0 \Rightarrow$$

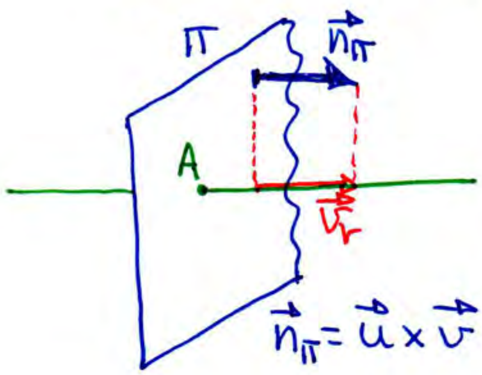
$$\Rightarrow -5x + 2y + 3z - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x - 2y - 3z + 5 = 0 \checkmark$$

(b) Nos piden calcular la ecuación de la recta r perpendicular a $\pi \equiv \begin{cases} x = 1+2\lambda+3\mu \\ y = -2+\lambda \\ z = 1-3\lambda-3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(1,-2,1) \\ \vec{u}(2,1,-3) \\ \vec{v}(3,0,-3) \end{cases}$

y que pase por el punto $A(0,-2,3)$.

Una recta queda determinada con un punto (el punto A) y un vector director. Como la recta debe ser perpendicular, basta ponerle como vector director, el normal al plano π



Un vector normal de π será el producto vectorial de $\vec{u}(2,1,-3)$ y $\vec{v}(3,0,-3)$

$$\vec{n}_\pi = \vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\vec{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{n}_\pi = -3\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k} \Rightarrow \vec{n}_\pi(-3,-3,-3) \underset{\boxed{\text{PROPORCIONAL}}}{\sim} (1,1,1)$$

La recta pedida $r \equiv \begin{cases} A(0,-2,3) \\ \vec{v}_r = \vec{n}_\pi(1,1,1) \end{cases}$, la ecuación

continua será: $\dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-3}{1}$

$\Rightarrow$ Recordar que dada una recta determinada por: $\begin{cases} P(p_1,p_2,p_3) \\ \vec{v}_r(v_1,v_2,v_3) \text{ vector director} \end{cases}$, su ecuación continua sale así: $\dfrac{x-p_1}{v_1} = \dfrac{y-p_2}{v_2} = \dfrac{z-p_3}{v_3}$

m) Otra ecuación sería la paramétrica:

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda v_1 \\ y = p_2 + \lambda v_2 \\ z = p_3 + \lambda v_3 \end{cases} \quad \text{como } r \begin{cases} A(0,-2,3) \\ \vec{v_r}(1,1,1) \end{cases}$$

La ecuación paramétrica de r será:

$$r \begin{cases} x = 0 + \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

4 En un cierto instituto el 50% de su alumnado lleva el desayuno desde casa, el 40% lo compra en la cafetería del instituto, y el resto lo adquiere en un bazar cercano al instituto. Solamente un 5% de los desayunos que se llevan desde casa incluyen bebidas azucaradas, pero en los desayunos comprados en la cafetería este porcentaje es del 60% y en los desayunos comprados en el bazar del 80%

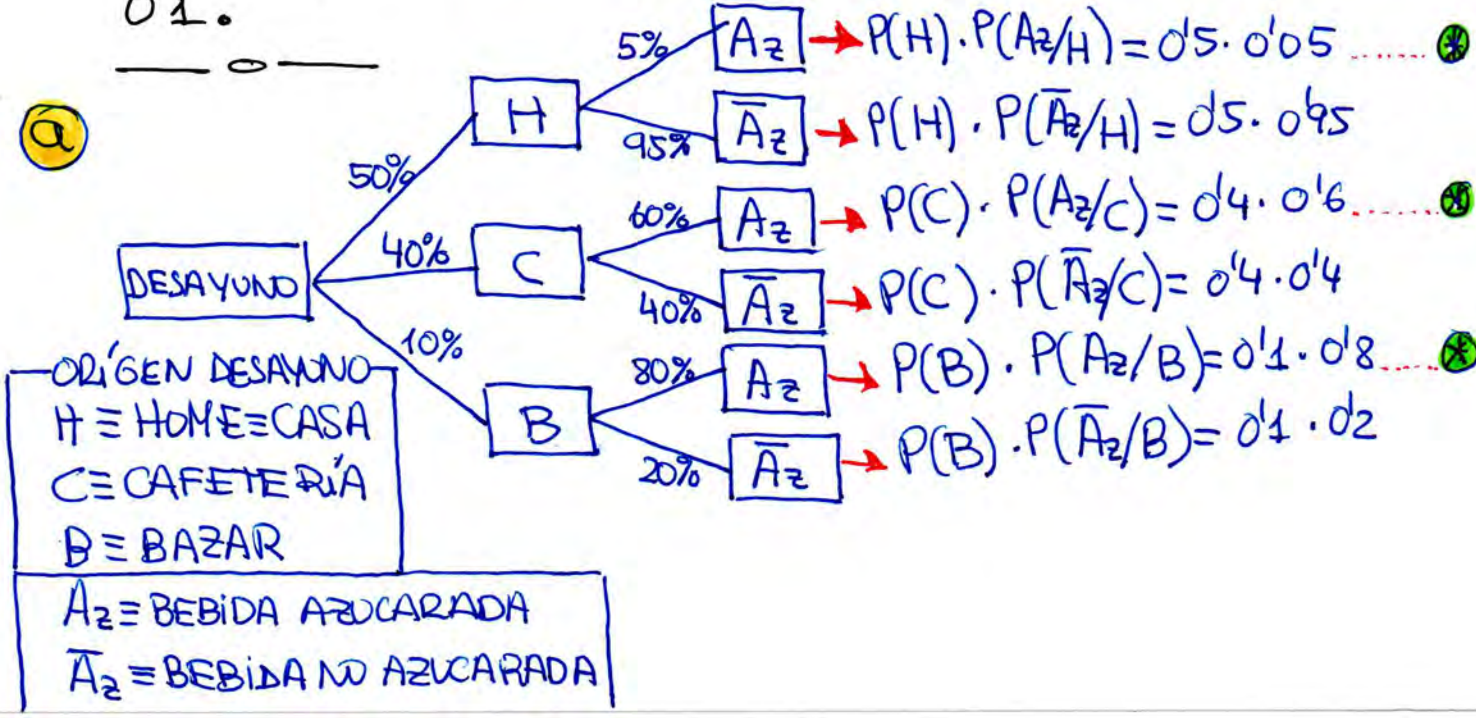
ⓐ Construir el árbol de probabilidades descrito en el enunciado.

ⓑ Justificar si es cierto que más de un 30% de los desayunos del alumnado incluyen bebidas azucaradas.

ⓒ Justificar si es cierto que, elegido un desayuno al azar, la probabilidad de que un estudiante lo haya traído desde casa, sabiendo que el desayuno incluye una bebida azucarada, es mayor que 0'1.

—— o ——

ⓐ



(b) Aplicando el teorema de la probabilidad total (Fijándonos en el árbol (*))

$\underline{P(Az)} = P(H) \cdot P(Az/H) + P(C) \cdot P(Az/C) + P(B) \cdot P(Az/B) =$

$= 0'5 \cdot 0'05 + 0'4 \cdot 0'6 + 0'1 \cdot 0'8 = \boxed{0'345}$ que es un 34'5%

Luego justificamos que es cierto que más de un 30% de los desayunos contienen bebidas azucaradas.

(c) $P(H/Az) = \dfrac{P(Az \cap H)}{P(Az)} = \dfrac{P(H) \cdot P(Az/H)}{P(Az)} = \dfrac{0'5 \cdot 0'05}{\underline{0'345}} =$

$= 0'072$ y como $0'072 < 0'1$

Justificamos que es falsa la afirmación del enunciado. Pues no es cierto que sea mayor que 0'1.