EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2020–2021

Distrito Universitario de Canarias

MATERIA: MATEMÁTICAS II	**(1)**
Convocatoria:	

Instrucciones:
- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas entre las parejas 1A-1B, 2A-2B, 3A-3B y 4A-4B, correspondientes a cada uno de los bloques de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque de contenido, se considerará sólo la primera pregunta respondida de ese bloque.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Criterios de calificación

A) Se valorará todo lo escrito en cada respuesta y no sólo el resultado final.

B) En las respuestas se corregirán los desarrollos necesarios y también las explicaciones breves de los mismos.

C) Cada error cometido en una respuesta resta calificación en función de la importancia de dicho error, pero no repercute en lo que se haya hecho después, mientras lo realizado sea coherente con dicho error y tenga sentido matemático.

D) Se penalizará cada notación gravemente incorrecta, que indique desconocimiento de cuestiones importantes (por ejemplo, usar la notación de determinante cuando se trata de una matriz o viceversa, confundir coordenadas de vector o de punto).

E) Cuando sea necesario representar gráficamente una función, dicha representación deberá basarse en características importantes de la misma, que deberá obtener previamente, aunque en el enunciado de la pregunta esto no se haya pedido de forma explícita.

F) Cuando haya que representar gráficamente una región plana, sea limitada por rectas, sea limitada por curvas y rectas, o sea limitada por varias curvas, no sólo habrá que representar correctamente los segmentos o arcos que intervengan (según apartado E), sino que habrá que calcular los puntos de corte entre ambas gráficas, si dichos puntos están relacionados con la región pedida. Se dará cada uno de esos puntos con sus dos coordenadas, aunque no se pida explícitamente.

G) Cuando se piden abscisas basta con la coordenada x. Cuando se piden puntos deben dar las dos coordenadas.

H) Los rangos de las matrices hay que justificarlos (puede hacerse por la técnica de menores orlados o reduciendo la matriz a una escalonada por filas equivalentes)

I) En respuestas sobre geometría del espacio, no basta escribir una ecuación pedida (o que se necesite para otro resultado), sino que se requiere una explicación mínima de lo que significa geométricamente y de dónde provienen los números que aparecen en esta como coeficiente. Igualmente, cuando se trata de varias ecuaciones simultáneas (ecuaciones de una recta o ecuaciones paramétricas de un plano).

J) Los cálculos intermedios hay que hacerlos siempre en forma exacta (se observa que algunos alumnos, desde el principio de una respuesta, sustituyen algún valor por una mala aproximación decimal, con la cual operan dando por bueno el resultado final obtenido, que suele estar muy alejado del resultado correcto). Así uno de los objetivos a evaluar es una operatoria adecuada y que conozcan el uso correcto de los números que deben utilizar según el contexto de trabajo.

K) Se exige utilizar correctamente los signos de igualdad y de aproximación.

L) En los cálculos de probabilidad donde se proceda a realizar la aproximación de la distribución binomial por la distribución normal se debe justificar que el procedimiento se puede hacer.

M) En los problemas de probabilidad se debe indicar el teorema que se utiliza para realizar el cálculo de la probabilidad.

N) Los problemas de probabilidad que utilicen la Distribución Binomial, deberán escribir la fórmula de cálculo de la probabilidad.

SE PROPONE UNA SOLUCIÓN CORRECTA. OTRAS SOLUCIONES CORRECTAS TAMBIÉN SE ACEPTAN

Bloque 1.- Análisis

1A. Dada la función $f(x) = \frac{ax^2-2}{b-x}$, donde a y b son dos parámetros con valores reales.

a) Calcular el valor de los parámetros a y b que verifican $f(-2) = 2$ y que $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R} - \{5\}$. Escribir la función resultante $f(x)$ y calcular su derivada $f'(x)$. 1.25 ptos

b) Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la función $f(x)$ si los parámetros toman los valores $a = -1$ y $b = -3$ 1.25 ptos

Solución:

a) Como $f(-2) = 2$ tenemos que $f(-2) = \frac{a(-2)^2-2}{b-(-2)} = 2 \rightarrow \frac{4a-2}{b+2} = 2 \rightarrow$

$4a - 2 = 2(\mathrm{b} + 2) \rightarrow 4a - 2b = 6$

por otro lado, sabemos que al no ser continua en x=5 el denominador se tiene que anular, es decir, b-x=0 en x=5, por lo que b=5 y entonces $4a - 2 \cdot 5 = 6 \rightarrow \mathrm{a} = 4$

Concluyendo que: $a = 4 \wedge b = 5$, $f(x) = \frac{4x^2-2}{5-x} \rightarrow f(x) = \frac{8x(5-x)+4x^2-2}{(5-x)^2} = \frac{-4x^2+40x-2}{(5-x)^2}$

b) Debemos hallar las asíntotas de $f(x) = \frac{-x^2-2}{-3-x} = \frac{x^2+2}{x+3}$

Asíntotas verticales: $x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$

Asíntota horizontal: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2}{x+3} = \infty$

No tiene asíntotas horizontales

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x^2+3x} = \frac{1}{1} = 1 \ ;$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x+3} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2-x^2-3x}{x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3x+2}{x+3} = -3$$

Por tanto tiene una asíntota oblicua: $y = x - 3$

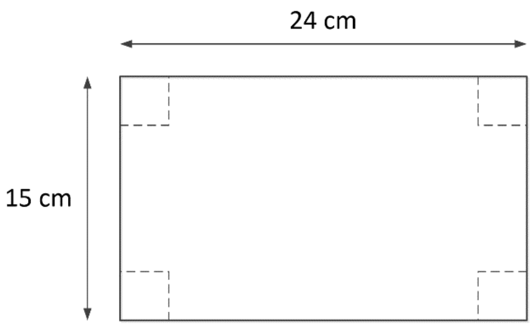
1B. Se desea construir una caja sin tapa superior. Para ello, se usa una lámina de cartón de 15 cm de ancho por 24 cm de largo, doblándola convenientemente después de recortar un cuadrado de iguales dimensiones en cada una de sus esquinas.

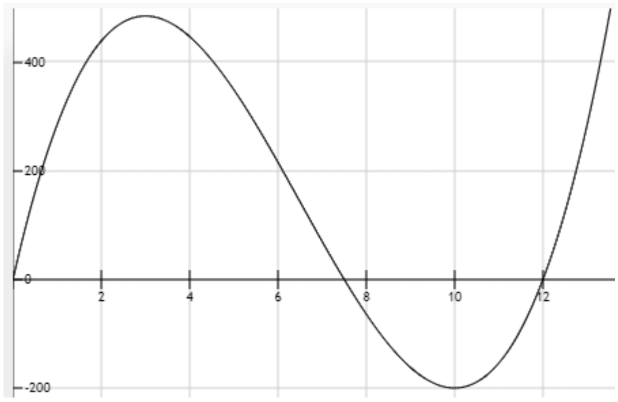
Se determina como requisito que la caja a construir contenga el mayor volumen posible. Indicar cuáles son las dimensiones de la caja y su volumen máximo. 2.5 ptos

Solución:

Sea x el lado del cuadrado que se quita, las dimensiones de la caja serán 15-2x, 24-2x y x, por lo que su volumen es:

$$V(x) = (15-2x)(24-2x)x \rightarrow V(x) = 4x^3 - 78x^2 + 360x \quad \mathbf{0.25}$$





función que tenemos que maximizar, para ello:

$V'(x) = 12x^2 - 156x + 360$ **0.25**
$V'(x) = 0 \rightarrow 12x^2 - 156x + 360 = 0 \rightarrow x^2 - 13x + 30 = 0$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169-120}}{2} = \frac{13 \pm 7}{2} = 0 \begin{cases} x_1 = 10 \rightarrow \textit{no válido según contexto del problema} \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

comprobemos si *x* = 3 es un máximo

$V''(x) = 24x - 156$
$V''(3) = -84 < 0 \rightarrow$ máximo

por lo tanto, para construir la caja de mayor volumen se debe recortar los cuadrados de 3 cm de lado, por lo que, las dimensiones de la caja serían: 18 cm x 9 cm x 3 cm

El volumen máximo de la caja será de 3x9x18 = 486 cm^3

Bloque 2.- Álgebra

2A. Calcular el valor de la matriz $M = X^2 - Y^2$, siendo X e Y las matrices que son solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

2.5 ptos

Solución:

$$\begin{cases} 4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases} \underset{\cdot(-2)}{\Longrightarrow} \begin{cases} 4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \\ -4X - 2Y = -2\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases} \underset{\cdot(-3)}{\Longrightarrow} \begin{cases} 4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \\ -6X - 3Y = -3\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$-2X = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos:

$$X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$$

$$Y^2 = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 20 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X^2 - Y^2 = \begin{pmatrix} 22 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 20 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -11 & 6 \end{pmatrix}$$

2B. Un granjero compra un determinado mes 274€ de pienso para su ganado. Con ese dinero ha comprado un total de 66 sacos de pienso de tres marcas diferentes: A, B y C. Se sabe que el precio de cada marca de pienso que ha comprado es de 5€, 4€ y 4€, respectivamente. También se sabe que el número de sacos adquiridos de la marca C es el doble que el total de sacos comprados de las marcas A y B juntos. Averiguar la cantidad de sacos que el granjero ha comprado de cada una de las tres marcas. 2.5 ptos

Solución:

Llamamos:

x = Nº de sacos de pienso de la marca A
y = Nº de sacos de pienso de la marca B
z = Nª de sacos de pienso de la marca C

Como el número de sacos adquiridos es 66: $x + y + z = 66$

El precio de cada saco es:

Saco marca A, 5€/saco: $5x$
Saco marca B y C, 4€/saco: $4y$ y $4z$
El precio total de la compra es 274€.

La ecuación será: $5x + 4y + 4z = 274$

El número de sacos comprados de la marca C es el doble de los sacos de la marca A y B juntos:

$z = 2(x + y) \Rightarrow z = 2x + 2y \Rightarrow 2x + 2y - z = 0$

Obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 66 \\ 5x + 4y + 4z = 274 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Una forma de resolverlo es mediante el método de Cramer:

Definimos la matriz del sistema $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y calculamos $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$

Lo resolvemos por el Método de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 66 & 1 & 1 \\ 274 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{30}{3} = 10 \;\; ; \;\; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 66 & 1 \\ 5 & 274 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{36}{3} = 12 \;\; ; \;\; z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 66 \\ 5 & 4 & 274 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{132}{3} = 44$$

Se han adquirido 10 sacos de la marca A, 12 de la marca B y 44 de la marca C.

Bloque 3.- Geometría

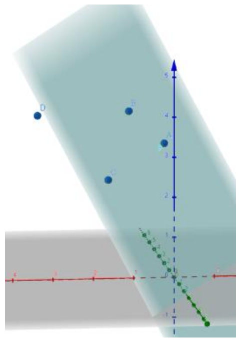
3A. Dados los siguientes puntos en el espacio tridimensional:
$A(0,-2,3), B\ (1,-1,4), C\ (2,3,3)$ y $D(4,5,5)$.

a) Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios. 1.5 ptos
A continuación, calcular la ecuación del plano que los contiene.

b) Calcular la ecuación de la recta r, perpendicular al plano $\pi: \begin{cases} x = 1+2\lambda+3\mu \\ y = -2+\lambda \\ z = 1-3\lambda-3\mu \end{cases}$ 1 pto

que pasa por el punto A

Solución:



a) Para comprobar que son coplanarios debemos crear los vectores que forman los cuatro puntos y verificar si son linealmente independientes:

$\overrightarrow{AB} = (1-0, -1-(-2), 4-3) = (1,1,1)$

$\overrightarrow{AC} = (2-0, 3-(-2), 3-3) = (2,5,0)$

$\overrightarrow{AD} = (4-0, 5-(-2), 5-3) = (4,7,2)$

Estudiamos el determinante dado por los tres vectores, o lo que es lo mismo, el rango de la matriz formada por los tres vectores, de forma que, si el determinante es no nulo, los vectores son linealmente independientes y no están alineados.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 10+14+0-20-0-4 = 0$$

Por lo que el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ es 2, y por tanto son linealmente dependientes, los vectores son coplanarios, y de igual forma lo son los cuatro puntos A, B, C y D.

Ahora construimos la ecuación del plano que contiene los cuatro puntos. Para ello necesitamos un punto A(0,-2,3), por ejemplo. Y dos vectores: AC y AD.

$$\begin{vmatrix} x & y+2 & z-3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 10x + 14(z-3) + 0 - 20(z-3) - 0 - 4(y+2)$$
$$= 10x + 14z - 42 - 20z + 60 - 4y - 8 = 10x - 4y - 6z + 10 = 0$$

Ecuación del plano:

$$5x - 2y - 3z + 5 = 0$$

b) Recta perpendicular a $\pi: \begin{cases} x = 1+2\lambda+3\mu \\ y = -2+\lambda \\ z = 1-3\lambda-3\mu \end{cases}$

Por tanto, debemos buscar el vector normal de dicho plano:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3i + 0k - 9j - 3k + 0i + 6j = -3i - 3j - 3k \equiv (1,1,1)$$

Con el vector normal y el punto A(0,-2,3) ya podemos construir la recta perpendicular:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2+\lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases} \equiv x = y+2 = z-3$$

3B. Dadas las ecuaciones de los planos

$$\pi_1: 2x + 3y - z = 9 \ \text{ y } \ \pi_2: \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -2 - \lambda + 2\mu \\ z = 3 + 3\lambda - \mu \end{cases}$$

a) Hallar la ecuación de la recta paralela a los planos π_1 y π_2 que pasa por el punto medio del segmento cuyos extremos son $A(1,-1,0)$ y $B(-1,-3,2)$ 1.25 ptos

b) Calcular el ángulo formado por los planos π_1 y π_2 1.25 ptos

Solución:

A) La recta paralela a los planos π_1 y π_2, verifica que el producto vectorial de los vectores normales de los planos será el vector director de la recta:

El vector normal a π_1 $es\ \vec{n}_1 = (2,3,-1)$

El vector normal al plano π_2 es $\vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k} = (-5,4,3)$

El vector normal a ambos vectores será: $\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ -5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 13\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 23\vec{k} = (13,-1,23)$

El punto medio del segmento de extremos A y B será: $M = (0,-2,1)$.

La ecuación de la recta será, por tanto:

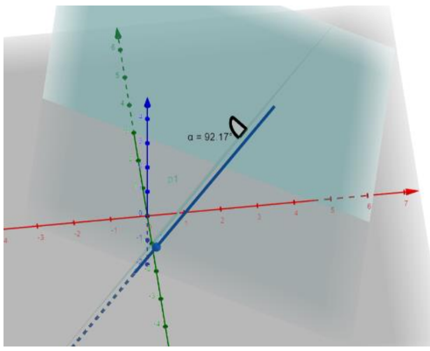
$\begin{cases} x = 13\lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = 1 + 23\lambda \end{cases}$ o bien $\frac{x}{13} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{23}$

B) El vector normal al plano α es $\vec{n}_\alpha = (2,3,-1)$

El vector normal al plano π_2 es $\vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k} = (-5,4,3)$

El ángulo formado por estos vectores es el ángulo formado por los planos:

$$\alpha = arccos\left(\frac{\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|}\right) = arccos\left(\frac{-10 + 12 - 3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{50}}\right) = 92{,}16°$$



Bloque 4.- Probabilidad

4A. En un cierto instituto el 50% de su alumnado lleva el desayuno desde casa, el 40% lo compra en la cafetería del instituto, y el resto lo adquiere en un bazar cercano al instituto. Solamente un 5% de los desayunos que se llevan desde casa incluyen bebidas azucaradas, pero en los desayunos comprados en la cafetería este porcentaje es del 60% y en los desayunos comprados en el bazar del 80%.

a) Construir el árbol de probabilidades descrito en el enunciado. 0.5 ptos

b) Justificar si es cierto que más de un 30% de los desayunos del alumnado incluyen bebidas azucaradas. 0.5 ptos

c) Justificar si es cierto que, elegido un desayuno al azar, la probabilidad que un estudiante lo haya traído desde casa, sabiendo que el desayuno incluye una bebida azucarada, es mayor que 0,1 1 pto

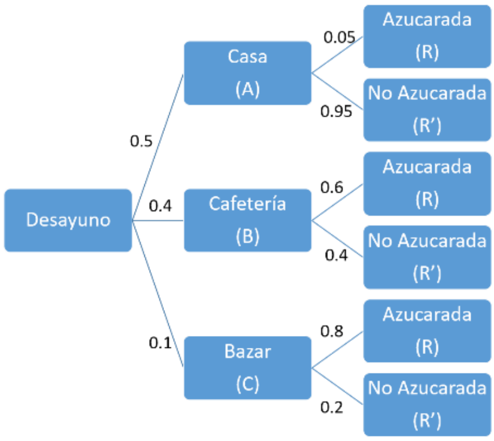
1 pto

Solución:

a)

Definir sucesos.

Árbol correctamente construido.



b)

$$P(R) \underbrace{=}_{\substack{Probabilidad\\ total}} P(R/A)\cdot P(A)+P(R/B)\cdot P(B)+P(R/C)\cdot P(C)=$$

$$=0'05\cdot 0'5+0'6\cdot 0'4+0'8\cdot 0'1=0'025+0'24+0'08=0'345\rightarrow 34.5\%$$

Un 34.5% toma bebidas azucaradas, por lo que la afirmación es cierta.

c)

$$P(A/R) \underbrace{=}_{\substack{Torema\\ de\ Bayes}} \frac{P(R/A)\cdot P(A)}{P(R)}=\frac{0'05\cdot 0'5}{0'345}=0'072$$

La probabilidad resultante es menor que 0.1, por lo que la afirmación es falsa.

4B. Se ha comprobado que, al aplicar un determinado medicamento, la probabilidad de que elimine el acné a un paciente es del 80 %. Suponiendo independencia de sucesos.

a) Si se lo toman 100 pacientes**.** ¿Cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe con más de 75 pacientes? 1 pto

b) Si se lo toman 225 pacientes**.** ¿Cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe entre 170 y 190 pacientes? 1 pto

c) ¿Cuál es el número esperado de pacientes sobre los que NO se eliminará el acné si se toman el medicamento 500 pacientes? 0.5 ptos

Solución:

a)

Si llamamos a *p* la probabilidad del suceso eliminar el acné, tenemos que $p = 0'8$
Llamamos X al número de pacientes de entre los 100 que se curan.

La probabilidad pedida es $P(X \geq 75)$ ya que el 75% de 100 =75 y como $X \sim B(100{,}0'8)$ pues se trata de 100 sucesos independientes con idéntica probabilidad de éxito:

$$P(X \geq 75) \underbrace{=}_{\substack{Requisitos \\ np=100\cdot 0'8=80>5 \\ nq=100\cdot 0'2=20>5 \\ \sigma=\sqrt{100\cdot 0'8\cdot 0'2}=4 \\ X'\sim N(80,4)}} P(X' \geq 75) \underbrace{=}_{\substack{Tipificando \\ Z\sim N(0,1)}} P\left(Z \geq \frac{75-80}{4}\right) =$$

$$= P(Z \geq -1'25) \underbrace{=}_{=} P(Z \leq 1'25) \underbrace{=}_{tabla} 0'8944$$

a) $X \sim B(225{,}0'8)$

$$P(170 \leq X \leq 190) = P(X \leq 190) - P(X \leq 170) \underbrace{=}_{\substack{Requisitos \\ np=225\cdot 0'8=180>5 \\ nq=225\cdot 0'2=45>5 \\ \sigma=\sqrt{225\cdot 0'8\cdot 0'2}=6 \\ X'\sim N(180,6)}}$$

$$P\left(Z < \frac{190-180}{6}\right) - P\left(Z < \frac{170-180}{6}\right) = P\left(Z < \frac{10}{6}\right) - P\left(Z < \frac{-10}{6}\right)$$
$$= P(Z < 1.67) - P(Z > 1.67) = P(Z < 1.67) - [1 - P(Z < 1.67)]$$
$$= 2 \cdot P(Z < 1.67) - 1 = 2 \cdot P(Z < 1.67) - 1 = 2 \cdot P(Z < 1.67) - 1$$
$$= 2 \cdot 0.9525 - 1 = 0.905$$

c)

Si llamamos a *q* la probabilidad del suceso eliminar el acné, tenemos que $q = 0'8$
Llamamos Y al número de pacientes de entre los 100 que no se curan:

$$E(Y) = nq = 500 \cdot 0'2 = 100$$

El número esperado de pacientes sobre los que no se eliminará el acné es 100.