GRUPO B

1. Sean las funciones $f(x) = 2x^4 + ax^2 + b$ y $g(x) = -2x^3 + c$.
   a. Calcule los valores *a*, *b* y *c* de manera que las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ cumplan las dos condiciones siguientes:
      - Se corten en el punto $P(1,1)$
      - En dicho punto coincida la pendiente de las rectas tangentes.

      Dar las expresiones de las funciones resultantes.
   b. Suponiendo $a = b = 1$ en $f(x)$, halle las asíntotas de la función:
$$h(x) = \frac{f(x)}{x^3 - 1}$$

Solución:

a. Si son tangentes en el punto $P(1,1)$, las gráficas deben pasar por dicho punto, es decir:

$f(1) = 1 \Rightarrow a + b + 2 = 1 \Rightarrow \boldsymbol{a + b = -1} \ (\boldsymbol{I})$

$g(1) = 1 \Rightarrow c - 2 = 1 \Rightarrow \boldsymbol{c = 3}$

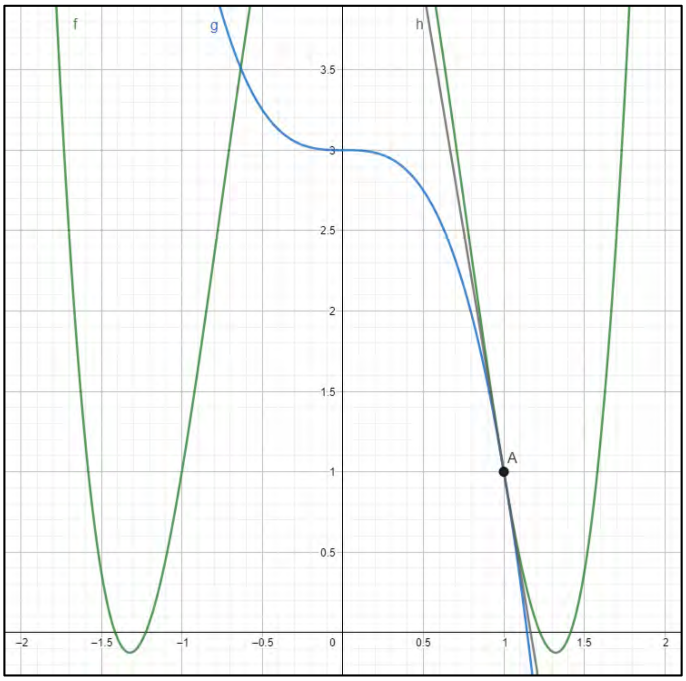
Como además son tangentes en P, deben coincidir las derivadas primeras de ambas funciones en dicho punto, esto es: $f'(1) = g'(1)$.

Las derivadas de ambas funciones serán: $f'(x) = 8x^3 + 2ax$ y $g'(x) = -6x^2$.

Entonces: $\begin{cases} f'(1) = 2a + 8 \\ g'(1) = -6 \end{cases} \Rightarrow 2a + 8 = -6 \Rightarrow \boldsymbol{a} = -\frac{\mathbf{14}}{\mathbf{2}} = \mathbf{-7}$

y sustituyendo b en (***I***), obtenemos: $\boldsymbol{b = 6}$

Con lo que las funciones serán: $\boldsymbol{f(x) = 2x^4 - 7x^2 + 6}$ **y** $\boldsymbol{g(x) = -2x^3 + 3}$



b.

$$Para\ a = b = 1, la\ función\ será: h(x) = \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1}$$

Asíntotas Verticales

Se determina para qué valores se anula el denominador.

$$x^3 = 1 \ \rightarrow x = 1$$

$$\lim_{x \to 1} h(x): \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1} = \dfrac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1} = \dfrac{4}{0^+} = \infty \end{cases}$$

Asíntota Vertical en x = 1.

Asíntotas Horizontales

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1} = \infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1} = -\infty$$

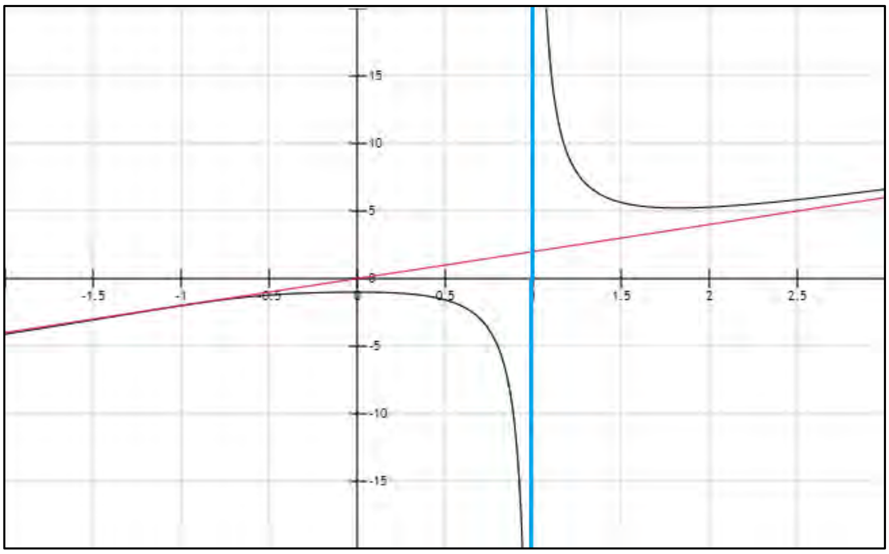
No existen asíntotas horizontales.

Asíntotas Oblicuas

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1}}{x} = \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^4 - x} = 2$$

$$n = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1} - 2x = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^4 + x^2 + 1 - 2x^4 + 2x}{x^3 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1} = 0$$

Existe una asíntota oblicua dada por la recta y = 2x.



2. Una pequeña bombonería tiene en su almacén 24 kg de chocolate y 60 litros de leche, con los que elabora tres productos distintos: cajas de bombones, tabletas de chocolate y paquetes de chocolate en polvo. Del resto de los ingredientes se tienen reservas suficientes.

   Se sabe que las cajas de bombones requieren 2 kg de chocolate y 6 litros de leche, las tabletas de chocolate requieren 4 kg de chocolate y 4 litros de leche, y cada paquete de chocolate en polvo requiere 1 kg de chocolate y 4 litros de leche. Se quiere fabricar un total de 12 unidades y con ello se consume todo el chocolate y toda la leche almacenados. ¿Cuántas unidades deben fabricarse de cada tipo de producto?

Solución

Definimos las variables

x: "número cajas de bombones"

y: "número tabletas de chocolate"

z: "número paquetes de chocolate en polvo"

Se quieren fabricar un total de 12 unidades de los tres productos $x+y+z=12$

Requerimientos de chocolate por producto para 24 kg, $2x+4y+z=24$

Requerimientos de leche por producto para 60 lt en almacén, $6x+4y+4z=60$

Quedando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=12 \\ 2x+4y+z=24 \\ 6x+4y+4z=60 \end{cases}$$

Opción 1. Se aplica el método de Cramer: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 16+8+6-(24+4+8) = -6$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 24 & 4 & 1 \\ 60 & 4 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{192+96+60-(240+48+96)}{16+8+6-(24+4+8)} = \frac{-36}{-6} = 6$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 2 & 24 & 1 \\ 6 & 60 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{96+120+72-(144+60+96)}{16+8+6-(24+4+8)} = \frac{-12}{-6} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 2 & 4 & 24 \\ 6 & 4 & 60 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{240+96+144-(288+96+120)}{16+8+6-(24+4+8)} = \frac{-24}{-6} = 4$$

Se fabricarán 6 cajas de bombones, 2 tabletas de chocolate y 4 paquetes de chocolate en polvo.

Opción 2. Por Gauss:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=12 \\ 2x+4y+z=24 \\ 6x+4y+4z=60 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=12 \\ 2y-z=0 \\ -2y-2z=-12 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=12 \\ 2y-z=0 \\ -3z=-12 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x=6 \\ y=2 \\ z=4 \end{array}\right\}$$

Se fabricarán 6 cajas de bombones, 2 tabletas de chocolate y 4 paquetes de chocolate en polvo.

3. Consideremos la recta $r: \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x - 4z = -1 \end{cases}$,y el plano $\pi_1 \equiv x - y + 3z = 12$
   a. Calcule la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π_1.
   b. Sabiendo que la recta r corta el plano π_1, averigüe el punto de intersección.

Solución

a.

Para determinar la ecuación del plano π_2, necesitamos dos vectores y un punto.

Si el plano $\boldsymbol{\pi_1}$ es perpendicular al plano $\boldsymbol{\pi_2}$**,** los vectores normales a $\boldsymbol{\pi_1}$ **son directores del plano** $\boldsymbol{\pi_2}$ que buscamos.

$\pi_1 \equiv x - y + 3z - 12 = 0 \Longrightarrow \vec{w} = (1, -1, 3)$ es normal a π_1**.**

Entonces el vector $\vec{w}$ es director del plano $\boldsymbol{\pi_2}$**.**

El vector director se consigue mediante $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (4, 8, 3)$

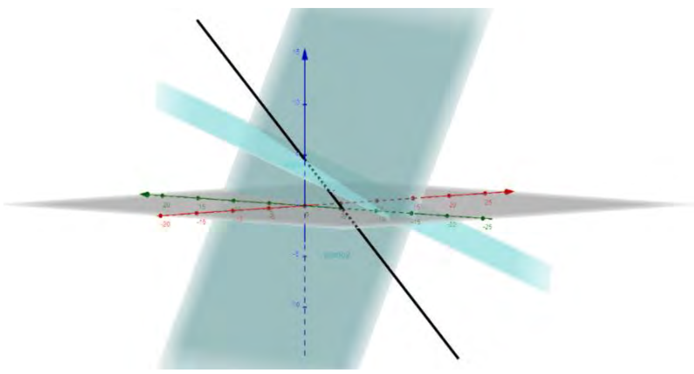
Como r está en el plano, el vector director de la recta es uno de los vectores directores del plano.

Considerando un punto P de la recta, que pertenecerá al plano. Haciendo x=1, y=-3, z=1 será un punto P (1, -3, 1)

La ecuación general será:

$$\boldsymbol{\pi_2} \equiv \begin{cases} P(1, -3, 1) \\ \vec{w} = (1, -1, 3) \\ \vec{u} = (4, 8, 3) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

-3x + 3 +8z -8 +12y + 36 +4z – 4 -24x + 24 -3y – 9 = 0
-27x +9y +12z + 42 = 0
Entonces la ecuación del plano $\boldsymbol{\pi_2}$ ≡**-9x+3y+4z+14=0**



b.

Buscamos un punto y un vector de la recta r:

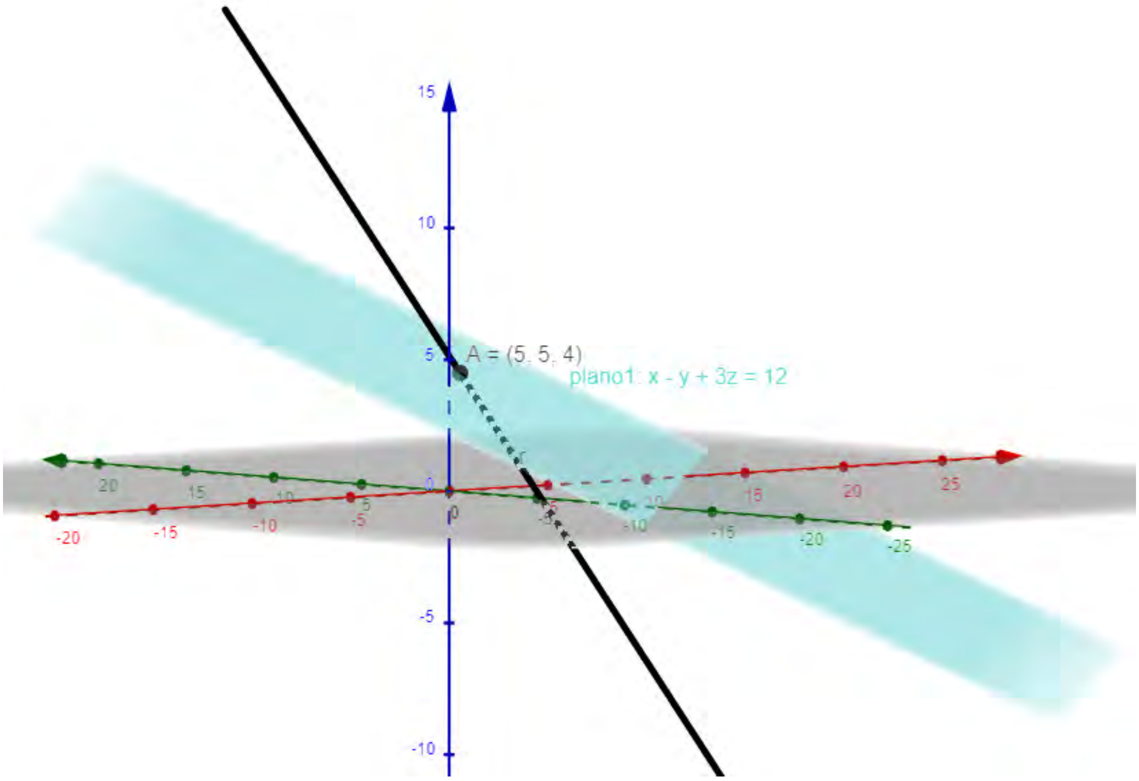
El vector director los conseguimos con $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (4, 8, 3)$

Considerando un punto P de la recta. Haciendo x=1, y=-3, z=1 será un punto P (1, -3, 1)

Por tanto, podemos escribir la recta como los puntos que verifican:
X=1+4λ; y=-3+8λ; z=1+3λ

Sustituimos en la ecuación del plano para obtener λ, que nos dará el punto de corte:
1+4λ-(-3+8λ)+3(1+3λ) = 7 +5λ = 12; λ = 1

Punto de corte: (5, 5, 4)



4. Se sabe que el 8% de los análisis de comprobación del níquel en una aleación de acero son erróneos. Se realizan 10 análisis.
   a. Se afirma que la probabilidad de que 3 o más análisis sean erróneos es menor que el 3%. Justifique si es cierto.
   b. Se afirma que la probabilidad de obtener exactamente 3 análisis erróneos es menor que el 3%. Justifique si es cierto.
   c. Si se realizan 100 análisis, justifique si el número esperado de análisis correctos es igual a 8

Solución

a.
Se define la variable *X* = "número de resultados inexactos en los *n* = 10 análisis de níquel realizados"
Eventos independientes
$X \sim \mathrm{B}(n, p) = B(10, 0.08)$
"éxito"= que el análisis sea inexacto *p* = 0.08 , *q* = 1- *p* = 0.92

a) Cuál es la probabilidad de que más de 2 de los 10 sean erróneos.

$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$$

$$= \binom{10}{0} p^0 q^{10} + \binom{10}{1} p\ q^9 + \binom{10}{2} p^2 q^8 =$$

$$= \frac{10!}{0!10!}(0.08)^0 (0.92)^{10} + \frac{10!}{1!9!}(0.08)\ (0.92)^9 + \frac{10!}{2!8!}(0.08)^2 (0.92)^8 = 0.9599$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \left(P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)\right)$$
$$P(X > 2) = 1 - (0.434 + 0.377 + 0.1478) = 1 - 0.9588 = 0.0412$$

Existe un 4.12% de probabilidades de que se decida descartar este método de determinación de níquel en aleación de acero.
No es cierto. Hay más de un 3%

b.

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} p^3 q^{10-3} = \frac{10!}{3!(10-3)!}(0.08)^3 (0.92)^7 = 0.03427$$

Existe un 3.42% de probabilidad de que 3 de los 10 análisis sean erróneos.
No es cierto. Hay más de 3%

c.

Hallamos la esperanza matemática: $E[X] = \mu = nq = 100(0.92) = 92$

Aproximadamente se espera unos 92 análisis exactos realizados**. Por lo que la afirmación no es cierta.**