MATEMÁTICAS II 2020 JULIO B

1 Sean las funciones $f(x)=2x^4+ax^2+b$ y $g(x)=-2x^3+c$

ⓐ Calcule los valores de a, b y c de manera que las gráficas de f(x) y g(x) cumplan las dos condiciones siguientes:

- Se cortan en el punto P(1, 1)
- En dicho punto coincida la pendiente de las rectas tangentes.

Dar las expresiones de las funciones resultantes.

ⓑ Suponiendo a=b=1 en f(x), halle las asíntotas de la función:

$$h(x)=\frac{f(x)}{x^3-1}$$

ⓐ ¿a, b y c? en $\left\{\begin{array}{l} f(x)=2x^4+ax^2+b \\ g(x)=-2x^3+c \end{array}\right\}$ donde se cumpla:

•1 Se cortan en P(1, 1) ⟹ P(1, 1) verifica las dos funciones

•2 En P(1, 1) coincida la pendiente de la recta tangente de ambos

•1 . Si $P(\overset{x}{1},\overset{f(x)}{1})$ verifica pertenecer a $f(x) \Rightarrow f(1)=1$

$\Rightarrow f(1)=2(1)^4+a(1)^2+b=1 \Rightarrow 2+a+b=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a+b=-1}$

• Si P(1, 1) verifica pertenecer a $g(x) \Rightarrow g(1)=1$

$\Rightarrow g(1)=-2(1)^3+c=1 \Rightarrow -2+c=1 \Rightarrow \boxed{c=3}$

•2 . La pendiente de la recta tangente a f(x) en P(1, 1) es $f'(1)$

⟶

$f'(x)=8x^3+2ax$ y $f'(1)=8(1)^3+2a(1)=\underline{8+2a}$

• La pendiente de la recta tangente a $g(x)$ en $P(1,1)$ es $g'(1)$

$g'(x)=-6x^2$ y $g'(1)=-6(1)^2=\underline{-6}$

Como deben coincidir: $8+2a=-6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a=-6-8 \Rightarrow a=\frac{-14}{2} \Rightarrow \boxed{a=-7}$

⇝ Unamos las dos premisas:

$$\begin{cases} a+b=-1 \\ c=3 \\ a=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-7 \\ b=6 \\ c=3 \end{cases}$$

Con estos valores, las funciones quedan como sigue:

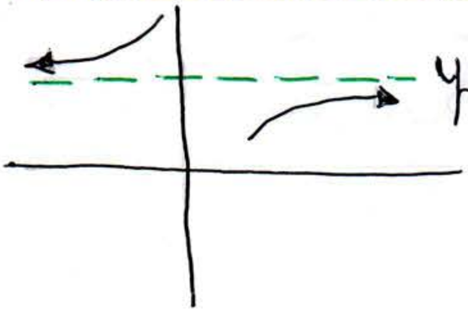
$$\begin{cases} f(x)=2x^4-7x^2+6 \\ g(x)=-2x^3+3 \end{cases}$$

b Suponiendo $a=b=1$ en $f(x)=2x^4+ax^2+b$, la función queda: $f(x)=2x^4+x^2+1$

Nos piden hallar las asíntotas de $h(x)=\frac{f(x)}{x^3-1}$

$$h(x)=\frac{2x^4+x^2+1}{x^3-1}$$

⇝ ASÍNTOTA HORIZONTAL



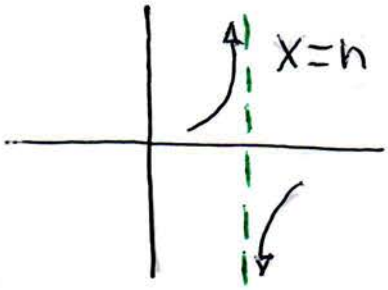
$y=m$, donde $\lim_{x\to\infty} h(x)=m$

GRADO DENOM > GRADO NUM

$$\lim_{x\to\infty} h(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+x^2+1}{x^3-1}=\infty$$

NO EXISTE ASÍNTOTA HORIZONTAL

ASÍNTOTA VERTICAL



$x=n$, donde $\lim_{x \to n} h(x) = \infty$

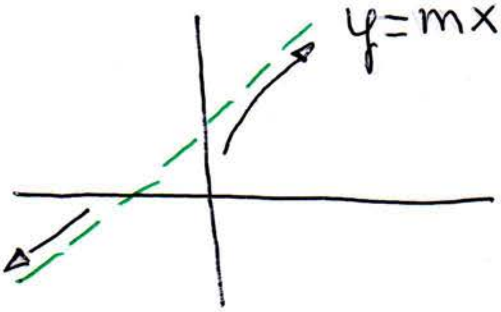
Estudiando la función $h(x) = \dfrac{2x^4+x^2+1}{x^3-1}$ comprobamos que cuando el denominador es cero no existe $h(x)$

– si $x^3-1=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

Entonces hemos encontrado un valor para el cual:

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^4+x^2+1}{x^3-1} \overset{4/0=\infty}{=} \infty \Rightarrow \boxed{x=1} \text{ ASÍNTOTA VERTICAL}$$

ASÍNTOTA OBLÍCUA



$y = mx+n$, donde $\begin{cases} ①\ m = \lim_{x \to \infty} \dfrac{h(x)}{x} \\ \text{y si } m \neq 0 \\ ②\ n = \lim_{x \to \infty} (h(x) - mx) \end{cases}$

① $$\lim_{x \to \infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^4+x^2+1}{x^3-1}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^4+x^2+1}{x(x^3-1)} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x^4+x^2+1}{x^4-x} = 2 \Rightarrow \underline{m=2}$$

② $$\lim_{x \to \infty} (h(x) - \overset{m}{2}x) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^4+x^2+1}{x^3-1} - 2x \right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^4+x^2+1}{x^3-1} - \frac{2x(x^3-1)}{x^3-1} \right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{2x^4}+x^2+1-\cancel{2x^4}+2x}{x^3-1} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+2x+1}{x^3-1} = 0 \Rightarrow \underline{n=0}$$

CONT. ⇒

$m=2$ y $n=0$ en $y=mx+n$, queda $\boxed{y=2x}$

ASÍNTOTA OBLÍCUA

2 Una pequeña bombonería tiene en su almacén 24 Kg de chocolate y 60 litros de leche, con los que elavora tres productos distintos: cajas de bombones, tabletas de chocolate y paquetes de chocolate en polvo. Del resto de los ingredientes si tienen reserves suficientes.

Se sabe que las cajas de bombones requieren 2 Kg de chocolate y 6 litros de leche, las tabletas de chocolate requieren 4 Kg de chocolate y 4 litros de leche, y cada paquete de chocolate en polvo requiere 1 Kg de chocolate y 4 litros de leche

Se quiere fabricar un total de 12 unidades y con ello se consume todo el chocolate y toda la leche almacenados. ¿Cuántas unidades deben fabricarse de cada tipo de producto?

Datos: 24 Kg chocolate y 60 l de leche para 12 productos con los requerimientos siguientes:

UNIDADES	TIPO PRODUCTO	CHOC.	LECHE	CHOC.	LECHE
x	CAJAS DE BOMBONES	2 Kg	6 l	$2x$	$6x$
y	TABLETAS CHOCOLATE	4 Kg	4 l	$4y$	$4y$
z	PAQ. CHOCOLATE POLVO	1 Kg	4 l	z	$4z$
TOTAL 12				24	60

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=12 \\ 2x+4y+z=24 \\ 6x+4y+4z=60 \end{array}\right\}$$ Resolvamos el sistema triangularizando

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&12\\ 2&4&1&24\\ 6&4&4&60\end{array}\right) \underset{F_3=F_3-6F_1}{\overset{F_2=F_2-2F_1}{\approx}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&12\\ 0&2&-1&0\\ 0&-2&-2&-12\end{array}\right) \overset{F_2=-\frac{F_2}{2}}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&12\\ 0&1&1&6\\ 0&2&-1&0\end{array}\right) \underset{F_3=F_3-2F_2}{\approx}$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&12\\ 0&1&1&6\\ 0&0&-3&-12\end{array}\right) \Rightarrow \text{Convertimos} \begin{cases} x+y+z=12\\ y+z=6\\ -3z=-12\end{cases}$$

Resolvemos: $z=\frac{-12}{-3}=4 \Rightarrow \boxed{z=4}$

Sustituimos: $y+4=6 \Rightarrow y=6-4 \Rightarrow \boxed{y=2}$

Sustituimos: $x+2+4=12 \Rightarrow x=12-6 \Rightarrow \boxed{x=6}$

Solución: En la bombonería podrán elaborar 6 cajas de bombones, 2 tabletas de chocolate y 4 paquetes de chocolate en polvo.

3 Consideremos la recta $r:\begin{cases} 2x-y=5\\ 3x-4z=-1\end{cases}$, y el plano $\pi_1 \equiv x-y+3z=12$

ⓐ Calcule la ecuación del plano π_2, que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π_1

ⓑ Sabiendo que la recta r corta al plano π_1 averigue el punto de intersección.

ⓐ Hallar π_2 que contiene a la recta r y es perpendicular a π_1. Necesitamos un pto. y dos vectores

$\begin{cases} \vec{u} \equiv \text{El vector director de } r\\ \vec{v} \equiv \text{El vector normal de } \pi_1\end{cases}$

El producto vectorial $\vec{u}\times\vec{v}$ nos dará el vector normal de π_2

(a.1) El vector director de la recta r se calcula con el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan

$$r:\begin{cases} 2x-y=5 & \Rightarrow \vec{u}_1(2,-1,0) \\ 3x-4z=-1 & \Rightarrow \vec{u}_2(3,0,-4) \end{cases}$$

$$\vec{u}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\vec{k} = 4\vec{i}+8\vec{j}+3\vec{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{u}(4,8,3)}$$

(a.2) El vector normal de un plano genérico: $n_1x+n_2y+n_3z+D=0$, donde $\vec{n}(n_1,n_2,n_3)$ es el vector normal

$$\pi_1 \equiv x-y+3z=12 \Rightarrow \underline{\vec{v}(1,-1,3)} \text{ vector normal}$$

$$\Rightarrow \vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 8 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= 21\vec{i}-9\vec{j}-12\vec{k} \Rightarrow \vec{n}(21,-9,-12)$$

El plano pedido quedará determinado π_2 por:

$$\begin{cases} \vec{n}(21,-9,-12) \\ \text{Un punto de la recta } r \begin{cases} x=0 \\ y=-5 \\ z=\frac{1}{4} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}(21,-9,-12) \\ P(0,-5,\frac{1}{4}) \end{cases}$$

$\pi_2 \equiv 21x-9y-12z+D=0$ y $P(0,-5,\frac{1}{4}) \in \pi_2$, luego verificará su ecuación: $21\cdot 0-9(-5)-12(\frac{1}{4})+D=0$

$$\Rightarrow D=-45+3 \Rightarrow D=-42$$

$$\pi_2 \equiv 21x-9y-12z-42=0$$

SIMPLIFICAR $\pi_2 \equiv 9x-3y-4z-14=0$

b) Punto de intersección de π_1 y r

Resolvemos el sistema: $\begin{cases} 2x-y=5 & \to F_2 \\ 3x-4z=-1 & \to F_3 \\ x-y+3z=12 & \to F_1 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 12 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & -6 & -19 \\ 0 & 3 & -13 & -37 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & -6 & -19 \\ 0 & 0 & 5 & 20 \end{array}\right)$$

Resolvemos el sistema: $\begin{cases} x-y+3z=12 & (F_1) \\ y-6z=-19 & (F_2) \\ 5z=20 & (F_3) \end{cases}$

(F_3)

$5z=20 \Rightarrow \boxed{z=4}$

Sustituimos (F_2): $y-6\cdot 4=-19 \Rightarrow y-24=-19 \Rightarrow$

$\Rightarrow y=-19+24 \Rightarrow \boxed{y=5}$

Sustituimos (F_1): $x-5+3\cdot 4=12 \Rightarrow x-5+12=12$

$\Rightarrow \boxed{x=5}$

El punto de intersección del plano π_1 y la recta r es el punto $P(5,5,4)$.

4 Se sabe que el 8% de los análisis de comprobación de níquel en una aleación de acero son erróneos. Se realizan 10 análisis.

a) Se afirma que la probabilidad de que 3 o más análisis sean erróneos es menor que el 3%. Justifique si es cierto.

b) Se afirma que la probabilidad de obtener exactamente 3 análisis erróneos es menor que el 3%. Justificar si es cierto.

ⓒ Si se realizan 100 análisis, justifique si el número esperado de análisis correctos es igual a 8.

—o—

Se trata de una Distribución Binomial y se repite 10 veces. $\left\{ \begin{array}{l} X = \text{número de análisis erróneos} \\ X = B(10, 0'08) \text{ y } p = 0'08 \end{array} \right.$

Recordemos que en $X = B(10, 0'08)$:

$$P(X=m) = \binom{10}{m} \cdot p^m \cdot q^{10-m} = \binom{10}{m} 0'08^m \cdot 0'92^{10-m} \quad \boxed{q = 1-p}$$

ⓐ $P(X \geq 3) = 1 - P(X<3) =$

$= 1 - \left(P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \right)$

$= 0'04$. La probabilidad es de 4% NO ES MENOR QUE EL 3% ✓

NOTA:

$P(X=0) = \binom{10}{0} 0'08^0 \cdot 0'92^{10} = 1 \cdot 1 \; 0'92^{10} = \boxed{0'4344}$

$P(X=1) = \binom{10}{1} \cdot 0'08^1 \cdot 0'92^9 = \frac{10!}{(10-1)! \cdot 1!} \cdot 0'08 \cdot 0'92^9 =$

$= \frac{10 \cdot \cancel{9!}}{\cancel{9!} \cdot 1} \; 0'08 \cdot 0'92^9 = \boxed{0'3777}$

$P(X=2) = \binom{10}{2} \cdot 0'08^2 \cdot 0'92^8 = \frac{10!}{8! \cdot 2!} \cdot 0'08^2 \cdot 0'92^8 =$

$= \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!} \cdot 2} \cdot 0'08^2 \cdot 0'92^8 = 45 \cdot 0'08^2 \cdot 0'92^8 = \boxed{0'1478}$

ⓑ $P(X=3) = \binom{10}{3} 0'08^3 \cdot 0'92^7 = \frac{10!}{(10-3)! \, 3!} \cdot 0'08^3 \cdot 0'92^7 =$

$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!} \; 3 \cdot 2} \cdot 0'08^3 \cdot 0'92^7 = 5 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 0'08^3 \cdot 0'92^7 =$

$= 120 \cdot 0'08^3 \cdot 0'92^7 = 0'034$. La probabilidad es de un 3'4% por lo que NO ES MENOR QUE EL 3% ✓

c) Si se realizan 100 análisis.
Nos piden el número esperado de análisis correctos, para justificar si es 8.
$n=100$ y en este caso $p=0'92$;; $X=B(100, 0'92)$
La media es $n \cdot p = 100 \cdot 0'92 = 92$
El número esperado de análisis correctos es 92 $\Rightarrow$ 8 son los que se espera que salgan erróneos.
Es falso que el número esperado de análisis correctos sea 8.

Fin