MATEMÁTICAS II 2020 JULIO A

1 Consideremos la función $f(x)=\frac{\ln(x)}{x^2}$, donde ln denota el logaritmo neperiano. Resuelva justificadamente los siguientes apartados:

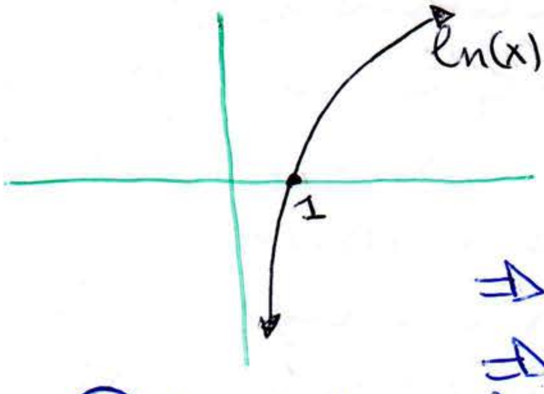
(a) Presente el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los posibles extremos relativos de la función $f(x)$.

(b) Calcule el valor de la integral $\int_1^e f(x)\,dx$.

(a)

(1) Dominio de la función son los valores de $\mathbb{R}$, donde $f(x)$ existe. Normalmente examinamos la función para descartar los valores en donde no existe $f(x)$

Como $f(x)=\frac{\ln(x)}{x^2}$, lo primero que hacemos es ver cuando el denominador se hace cero. Y además no siempre existe $\ln(x)$



$\left.\begin{array}{l}\ln(x) \text{ solo existe en } \mathbb{R}^+\setminus\{0\} \\ y \quad x^2=0 \Leftrightarrow x=0\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)$ existe en $\mathbb{R}^+\setminus\{0\} \Rightarrow$

$\Rightarrow D(f)=\mathbb{R}^+\setminus\{0\}=(0,+\infty)$ ✓

(2) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento se estudian con los signos de la primera derivada: $f'(x)=\frac{(\ln(x))'\cdot x^2-\ln(x)\cdot(x^2)'}{(x^2)^2}=$

$$=\frac{1/x\cdot x^2-\ln(x)\cdot 2\cdot x}{x^4}=\frac{x-2x\ln(x)}{x^4}=\frac{x(1-2\ln(x))}{x^4}=$$

$= \frac{1-2\ln(x)}{x^3}$; veamos cuando $f(x)=0 \Rightarrow 1-2\ln(x)=0$

$\Rightarrow 2\ln(x)=1 \Rightarrow \ln(x)=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Recordar que por definición $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$

$e^{1/2}=x \Rightarrow x=\sqrt{e}$

PUNTO CRÍTICO DONDE CAMBIA EL CRECIMIENTO /DECRECIMIENTO CAMBIA LA MONOTONÍA

0	1	$\sqrt{e}$ $\quad$ e
$1-2\ln(x)$	$1-2\ln(1)=$ $=1>0$ $+$	$1-2\ln(e)=$ $=-1<0$ $-$
x^3	$1>0$ $+$	$e^3>0$ $+$
$\frac{1-2\ln(x)}{x^3}$	$\frac{+}{+}>0$ $\nearrow$ CRECIENTE	$\frac{-}{+}<0$ $\searrow$ DECRECIENTE

NOTA: Elegimos un valor $x \in (0,\sqrt{e})$ // $x=1$

- $1-2\ln(1) = 1-2\cdot 0 = 1 > 0$ y $x^3 = 1^3 > 0$

Elegimos un valor $x \in (\sqrt{e},+\infty)$ // $x=e$

- $1-2\ln e = 1-2\cdot 1 = -1 < 0$ y $x^3 = e^3 > 0$

Por lo tanto en $(0,\sqrt{e})$ $f(x)$ es creciente y en el intervalo $(\sqrt{e},+\infty)$ $f(x)$ es decreciente

③ Como la función cambia en $x=\sqrt{e}$ de ser creciente $\nearrow$ a ser decreciente $\searrow$ en $\sqrt{e}$ tiene un máximo que en este caso es absoluto ✓ $x=\sqrt{e}$, $f(x)$ tiene MÁXIMO

Los puntos críticos máximos o mínimos de una función $f(x)$ son los valores de x donde $f'(x)=0$. Y para saber si se trata de máximo ó mínimo podemos ver los signos de $f'(x)$ antes y despues del punto ó podemos con la segunda derivada en ese punto estudiar la curvatura.

b) Calcular $\int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$

En general si $\int f(x)\,dx = F(x)$, entonces la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$

NOTACIÓN

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx =$$

Como no conseguimos que la derivada este en la expresion... ...la solucionamos como INTEGRAL POR PARTES

$$= \int \underbrace{\ln(x)}_{u} \cdot \underbrace{x^{-2}\,dx}_{dv} \overset{*}{=}$$

Recordar $\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$

Hemos organizado: $\begin{cases} u = \ln(x) \rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx \\ dv = x^{-2}\,dx \rightarrow v = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} \end{cases}$

$$(*) = \ln(x)\cdot(-x^{-1}) - \int \frac{-1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{-\ln(x)}{x} + \int x^{-2}\,dx =$$

$$= \frac{-\ln(x)}{x} + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{-\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} \quad \frac{-\ln(x)-1}{x}$$

Ahora resolvemos la integral definida:

$$\int_1^e f(x)\,dx = \left[\frac{-\ln(x)-1}{x}\right]_1^e = \frac{-\ln(e)-1}{e} - \left(\frac{-\ln(1)-1}{1}\right) =$$

$$= \frac{-1-1}{e} - \frac{(-0-1)\cancel{e}}{\cancel{e}} = \frac{-2}{e} + 1 \quad \checkmark$$

2 Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} K & 0 & 1 \\ 0 & K-1 & K-1 \\ K & 1 & K-3 \end{pmatrix}$ ④

ⓐ Halle los valores del parámetro K, para los que la matriz A tiene inversa.

ⓑ Tomando el valor $K=-1$ en la matriz A, calcule la matriz X que verifica que: $A\cdot X = 24\cdot I_3$, siendo I_3 la matriz identidad de orden 3.

ⓐ Cualquier matriz cuadrada tiene inversa $\Leftrightarrow$ su determinante es no nulo.

$\equiv$ "$\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$"

Aplicando propiedades de los determinantes:

$$|A| = \begin{vmatrix} K & 0 & 1 \\ 0 & K-1 & K-1 \\ K & 1 & K-3 \end{vmatrix} = (K-1)\begin{vmatrix} K & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ K & 1 & K-3 \end{vmatrix} =$$

$$=(K-1)\begin{vmatrix} K & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & K-4 \end{vmatrix} = (K-1)\begin{vmatrix} K & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & K-5 \end{vmatrix} =$$

$$= (K-1)(K\cdot(K-5)) = K\cdot(K-1)(K-5)$$

Si imponemos $|A|=0 \Rightarrow K(K-1)(K-5)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} K=0 \\ \text{ó } K=1 \\ \text{ó } K=5 \end{cases}$ Por lo tanto existirá matriz inversa A^{-1} si el parámetro K es $K\neq 0$ y $K\neq 1$ y $K\neq 5$ ✓

ⓑ Tomando $K=-1$, calcular la matriz X que verifica: $A\cdot X = 24\cdot I_3$, $A^{-1}(A\cdot X) = A^{-1}(24\cdot I_3)$

$\Rightarrow (A^{-1}\cdot A)\cdot X = 24(A^{-1}\cdot I_3) \Rightarrow X = 24\cdot A^{-1}$

para resolver la matriz $X = 24 \cdot A^{-1}$, necesitamos A^{-1}. Y como $K=-1 \neq 0$, $\neq 1$, $\neq 5$, existirá A^{-1}

$K=-1$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Calculamos su matriz inversa:

$$\begin{array}{c} F_1 \to \\ F_2 \to \\ F_3 \to \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 = F_3 - F_1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 = F_2\left(\frac{-1}{2}\right)}{\approx}$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 = F_3 - F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 = F_3\left(\frac{-1}{6}\right)}{\approx}$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{-1}{12} & \frac{-1}{6} \end{array}\right) \underset{F_1 = F_1 + F_3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-5}{6} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{-1}{12} & -\frac{1}{6} \end{array}\right) \underset{F_2 = F_2 - F_3}{\approx}$$

$\boxed{-1+\frac{1}{6} = \frac{-6+1}{6} = \frac{-5}{6}}$

$\boxed{-\frac{1}{2}+\frac{1}{12} = \frac{-6+1}{12} = \frac{-5}{12}}$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-5}{6} & \frac{-1}{12} & \frac{-1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{-5}{12} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{-1}{12} & -\frac{1}{6} \end{array}\right)$$

Con fracciones equivalentes

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-10}{12} & \frac{-1}{12} & \frac{-2}{12} \\ \frac{-2}{12} & \frac{-5}{12} & \frac{2}{12} \\ \frac{2}{12} & \frac{-1}{12} & \frac{-2}{12} \end{pmatrix} = \frac{-1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces...

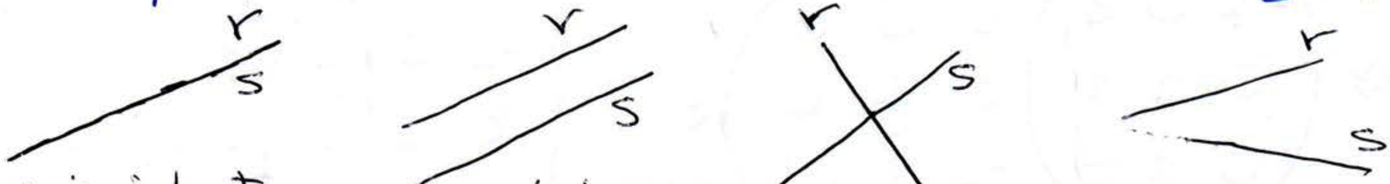
$$X = 24 \cdot A^{-1} = \underbrace{24 \cdot \left(\frac{-1}{12}\right)}_{-2} \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -2 & -4 \\ -4 & -10 & 4 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

3 Dados las rectas siguientes $r: \begin{cases} x+y-z=4 \\ x+2y=7 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x=2 \\ y+5=0 \end{cases}$

ⓐ Estudie la posición relativa de r y s

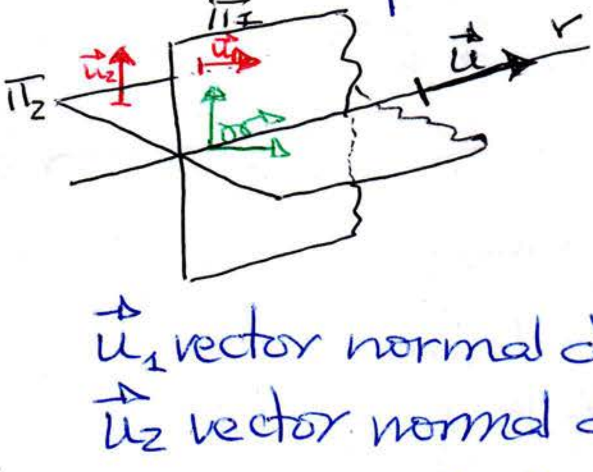
ⓑ Halle la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que contiene al punto $A(11,-2,5)$

ⓐ Para estudiar la posición relativa de dos rectas en el espacio, hay que comprobar si los vectores directores son proporcionales. Si lo son serán coincidentes o paralelas. Si no son proporcionales se cortan o se cruzan.



coincidentes | paralelas | se cortan | se cruzan

⇒ Hallamos vector director de r viene dada como intersección de dos planos. $\begin{cases} x+y-z=4 \equiv \pi_1 \\ x+2y=7 \equiv \pi_2 \end{cases}$



Un vector director de r, será el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan

$\vec{u_1}$ vector normal de $\pi_1 \equiv x+y-z=4 \Rightarrow \vec{u_1}(1,1,-1)$

$\vec{u_2}$ vector normal de $\pi_2 \equiv x+2y=7 \Rightarrow \vec{u_2}(1,2,0)$

$$\vec{u} = \vec{u_1} \times \vec{u_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$\Rightarrow \vec{u}(2,-1,1)$ Vector director de la recta r

$\Rightarrow$ Hallemos el vector director de s: $\begin{cases} x=2 \\ y=-5 \end{cases}$

En este caso será fácil poner la recta con su ecuación paramétrica $\begin{cases} x=p_1+\lambda v_1 \\ y=p_2+\lambda v_2 \\ z=p_3+\lambda v_3 \end{cases}$, donde

$P(p_1,p_2,p_3)$ es un punto de s y $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$ es un vector director de s

$$s:\begin{cases} x=2+\lambda\cdot 0 \\ y=-5+\lambda\cdot 0 \\ z=0+\lambda\cdot 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}(0,0,1) \\ P(2,-5,0) \end{cases}$$

Veamos la proporcionalidad de los vectores directores de las rectas dadas:

$$\begin{matrix} \vec{u}(2,-1,1) \\ \vec{v}(0,0,1) \end{matrix} \Bigg\} \; \frac{2}{0} \overset{?}{\neq} \frac{-1}{0} \overset{?}{\neq} \frac{1}{1}$$ No son proporcionales

Conclusión: se cortan o se cruzan, estudiemos la intersección. Será resolver el sistema formado por sus ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y-z=4 \\ x+2y=7 \\ x=2 \\ y=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-5-z=4 \\ 2-10=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3-z=4 \\ -8=7 \;\# \end{cases}$$

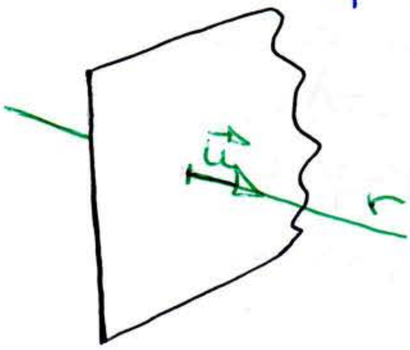
ABSURDO!!

EL SISTEMA NO TIENE SOLUCION $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ r y s NO SE CORTAN $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ r y s SE CRUZAN ✓

b) Nos piden la ecuación del plano perpendicular a r que contiene al punto: $A(11, -2, 5)$



El vector director de r será el vector normal del plano que nos piden $\pi \equiv n_1 x + n_2 y + n_3 z + D = 0$, donde (n_1, n_2, n_3) son los componentes del vector normal

$\vec{u}(2, -1, 1)$ es el vector director de la recta r calculado en el apartado anterior $\Rightarrow$

$\Rightarrow \pi \equiv 2x - y + z + D = 0$ y como pasa por el punto $A(\underset{x}{11}, \underset{y}{-2}, \underset{z}{5})$, verificará la ecuación

$$2\cdot(\overset{x}{11}) - (\overset{y}{-2}) + (\overset{z}{5}) + D = 0 \Rightarrow 22 + 2 + 5 + D = 0$$
$$\Rightarrow D = -29$$

La ecuación del plano $\pi \equiv 2x - y + z - 29 = 0$

4 El tiempo que transcurre hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras de chorro de tinta viene dado, aproximadamente, por una distribución normal con un ~~[illegible]~~ promedio de 1.500 horas y una desviación típica de 200 horas

a) ¿Qué porcentaje de esas impresoras fallarán antes de 1.000 horas de funcionamiento?

b) ¿Qué porcentaje de esas impresoras tendrán la primera avería entre las 1.000 y las 2.000 horas de uso?

ⓐ X será el número de horas de uso de una impresora // $X = N(1.500, 200)$

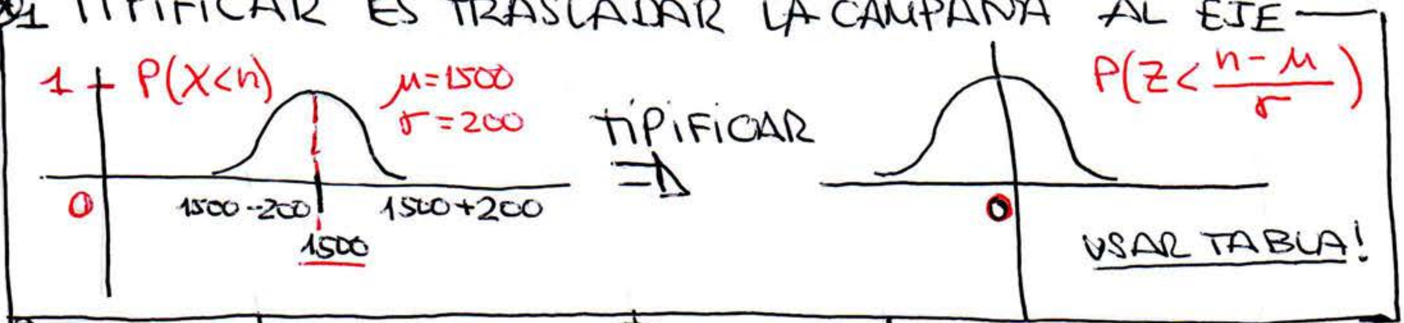
DISTRIBUCIÓN NORMAL
$\sigma = 200$ DESVIACIÓN TÍPICA
$\mu = 1500$ meses
TIPIFICAR: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

La probabilidad de que una impresora se averíe antes de las 1000 horas de uso:

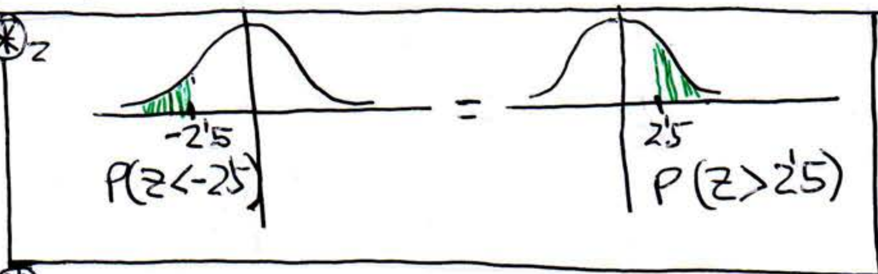
$$P(X<1000) \underset{*_1}{=} P\left(Z < \frac{1000-1500}{200}\right) = P(Z<-2'5) \overset{*_2}{=}$$

NOTAS:

$*_1$ TIPIFICAR ES TRASLADAR LA CAMPANA AL EJE

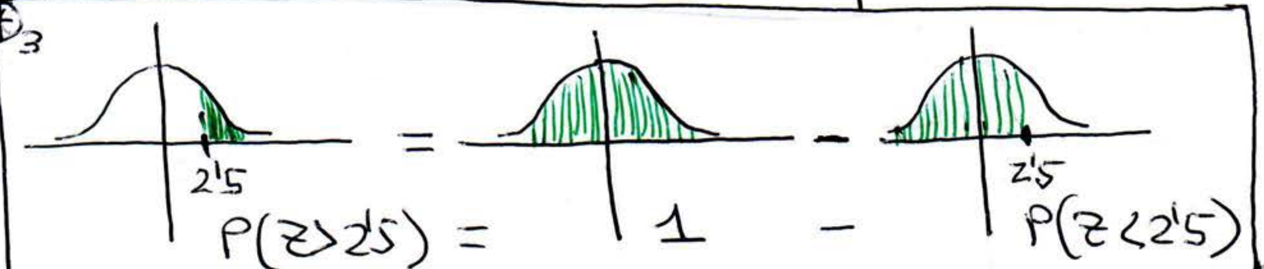


$*_2$



$$= P(Z>2'5) \overset{*_3}{=}$$

$*_3$



$$= 1 - P(Z<2'5) = 1 - 0'9938 = 0'0062 \Rightarrow 0'62\%$$

PORCENTAJE

x100

MIRAMOS EN LA TABLA DE DIST. NORMAL

PORCENTAJE DE IMPRESORAS QUE FALLARÁN ANTES DE 1000 H. DE USO.

ⓑ Que porcentaje de estas impresoras tienen la probabilidad de averiarse entre las 1000 y 2000 h.

$$P(1000<X<2000) = P(X<2000) - P(X<1000) =$$

TIPIFICAMOS

$$= P\left(Z < \frac{2000-1500}{200}\right) - P\left(Z < \frac{1000-1500}{200}\right) =$$

$$= P(Z < 2'5) - P(Z < -2'5) \underset{\text{APLICAMOS } ②_2}{=} P(Z < 2'5) - P(Z > 2'5) =$$

$$\underset{\text{APLICAMOS } ③_3}{=} P(Z < 2'5) - \left(1 - P(Z < 2'5)\right) = P(Z < 2'5) - 1 + P(Z < 2'5) =$$

PORCENTAJE

$$= 2 \cdot P(Z < 2'5) - 1 = 0'9876 \xRightarrow{\times 100} 98'76\%$$

✓

PORCENTAJE DE IMPRESORAS QUE FALLARÁN ENTRE LAS 1000 H Y 2000 H DE USO

Fin