MATEMÁTICAS II JUNIO

OPCIÓN B

① Calcular los asíntotas y los extremos relativos de la funcion $y = 3x + \frac{3x}{x-1}$ (2,5p)

$$f(x) = \frac{3x(x-1)}{x-1} + \frac{3x}{x-1} = \frac{3x^2-3x+\cancel{3x}}{x-1} = \frac{3x^2}{x-1}$$

ⓐ Asíntotas

Asíntota oblicua: $y = mx+n$, donde $\begin{cases} m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \\ n = \lim_{x\to\infty} (f(x)-mx) \end{cases}$

$$m = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\frac{3x^2}{x-1}}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x-1} =$$

$$= 3 \Rightarrow \boxed{m=3}$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x)-3x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2}{x-1} - 3x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-(3x(x-1))}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-(3x^2-3x)}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{3x^2}-3x^2+3x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x-1} = 3 \quad \boxed{n=3}$$

Entonces una asíntota oblicua: $y = 3x+3$

Asíntota horizontal: $y = a$; donde $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2}{x-1} = \infty \Rightarrow a=1$; Asíntota horizontal $y=1$

Asíntota vertical: $x = b$ donde $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$

$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{1} = \pm\infty$ No tiene Asíntota vertical

ⓑ Estudio de los extremos relativos de la función

$f(x)=\frac{3x^2}{x-1}$; Calculemos su derivada y forzemos que sea cero.

$$f'(x)=\left(\frac{3x^2}{x-1}\right)'=\frac{(3x^2)'\cdot(x-1)-(x-1)'\cdot 3x^2}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{6x(x-1)-1\cdot 3x^2}{(x-1)^2}=\frac{6x^2-6x-3x^2}{(x-1)^2}=\frac{3x^2-6x}{(x-1)^2}$$

Los $x\in\mathbb{R}$ / $f'(x)=0$ son los extremos relativos donde la función tiene máximos o mínimos

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{3x^2-6x}{(x-1)^2}=0 \Rightarrow 3x^2-6x=0 \Rightarrow 3x(x-2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

Comprobemos con $f''(x)$ si son máximos ó mínimos

$$f'(x)=\frac{3x^2-6x}{(x-1)^2} \; ; \; f''(x)=\frac{(6x-6)(x-1)^2-2(x-1)\cdot 1\cdot(3x^2-6x)}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{6(x-1)(x^2-2x+1)-2(x-1)(3x^2-6x)}{(x-1)^4}=\frac{\cancel{(x-1)}(6x^2-12x+6-(6x^2-12x))}{\cancel{(x-1)}(x-1)^3}$$

$$=\frac{\cancel{6x^2}-\cancel{12x}+6-\cancel{6x^2}+\cancel{12x}}{(x-1)^3}=\frac{6}{(x-1)^3}$$

$x=0$; $f''(0)=\frac{6}{(0-1)^3}=-6<0$ MÁXIMO EN $(0,0)$

$x=2$; $f''(2)=\frac{6}{(2-1)^3}=6>0$ MÍNIMO EN $(2,12)$

② Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 2 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ⓐ Calcular los valores del parámetro "m" para los cuales la matriz A tiene inversa.

ⓑ Para $m=1$, calcular la matriz inversa A^{-1}

ⓐ $\forall A$ matriz cuadrada, tiene inversa $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 2 \\ m-2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-1)(m+1)(m-2) = 0 \Rightarrow -(m^2-2m+m-2)=0$$

$$\Rightarrow -(m^2-m-2)=0 \Rightarrow -m^2+m+2=0$$

$$m^2-m-2=0$$

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{9}}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 \\ \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

Conclusión si $m=2$ ó $m=-1$, la matriz A no tiene inversa.

ⓑ Si $m=1$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, Hallemos su inversa

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que $A \cdot A^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & +1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

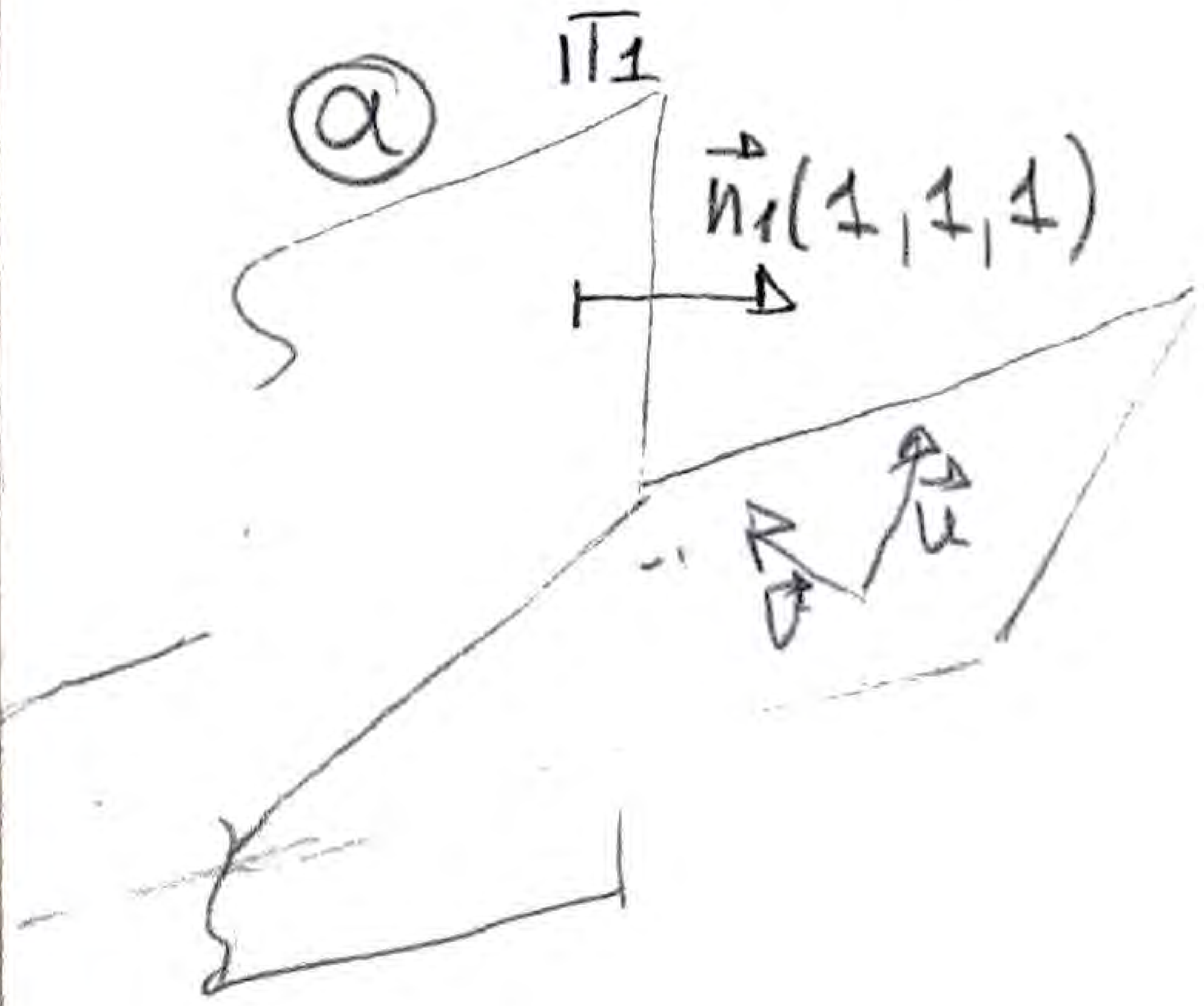
③ Dados los planos $\pi_1 : x+y+z-5=0$

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} x = 3+\lambda+2\mu \\ y = 1-\lambda-\mu \\ z = 1+\mu \end{cases}$$

ⓐ Comprobar que los planos π_1 y π_2 se cortan en una recta. Hallar la ecuación de dicha recta en forma paramétrica.

ⓑ Hallar la ecuación del plano π_3 que pasa por el origen y es perpendicular a los planos π_1 y π_2.

ⓐ



Si los vectores normales de π_1 y π_2 no son proporcionales, los planos no son paralelos $\Rightarrow$ Se cortan

Necesitamos el vector normal de π_2

Dos vectores directores de π_2, son

$\begin{cases} \vec{u}(1,-1,0) \\ \vec{v}(2,-1,1) \end{cases}$ $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{n}_2 \perp \pi_2$
p. vectorial vector normal

$$\vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} = (-1,-1,1)$$

Veamos si son proporcionales $\begin{cases} \vec{n}_2(-1,-1,1) \\ \vec{n}_1(1,1,1) \end{cases}$ $\frac{-1}{1} = \frac{-1}{1} \neq \frac{1}{1}$ no son proporcionales $\Rightarrow$

$\Rightarrow \pi_1 \not\parallel \pi_2 \Rightarrow$ Se cortan

La ecuación de la recta r donde se cortan π_1 y π_2 quedará determinada por un vector y un punto

NO NECESARIO

- El vector director de r será $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{u}$ $\left\{ \begin{array}{l} \vec{n}_1 \text{ normal } \pi_1 \\ \vec{n}_2 \text{ normal } \pi_2 \end{array} \right.$

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 0\vec{k} \Rightarrow$$

$\vec{u}(2,-2,0)$ vector director de r

- Necesitamos un punto de la intersección de los planos:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=5 \\ x = 3+\lambda+\mu \\ y = 1-\lambda-\mu \\ z = 1+\mu \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} x \quad + \quad y \quad + \quad z = 5 \\ (3+\lambda+\mu)+(1-\lambda-\mu)+(1+\mu)=5 \\ \\ 5+\mu=5 \Rightarrow \underline{\mu=0} \end{array}$$

Con $\mu=0$; $\underline{z=1+0=1}$; $y = 1-\lambda-\mu = 1-\lambda$ $\left\{ \begin{array}{l} y = 1-\lambda \\ x = 3+\lambda \end{array} \right.$

$x = 3+\lambda$

La recta r intersección de π_1 y π_2 verifica el sistema: $\left\{ \begin{array}{l} x = 3+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 1 \end{array} \right\}$ Ecuación paramétrica de la recta pedida

---

Comprobamos que:

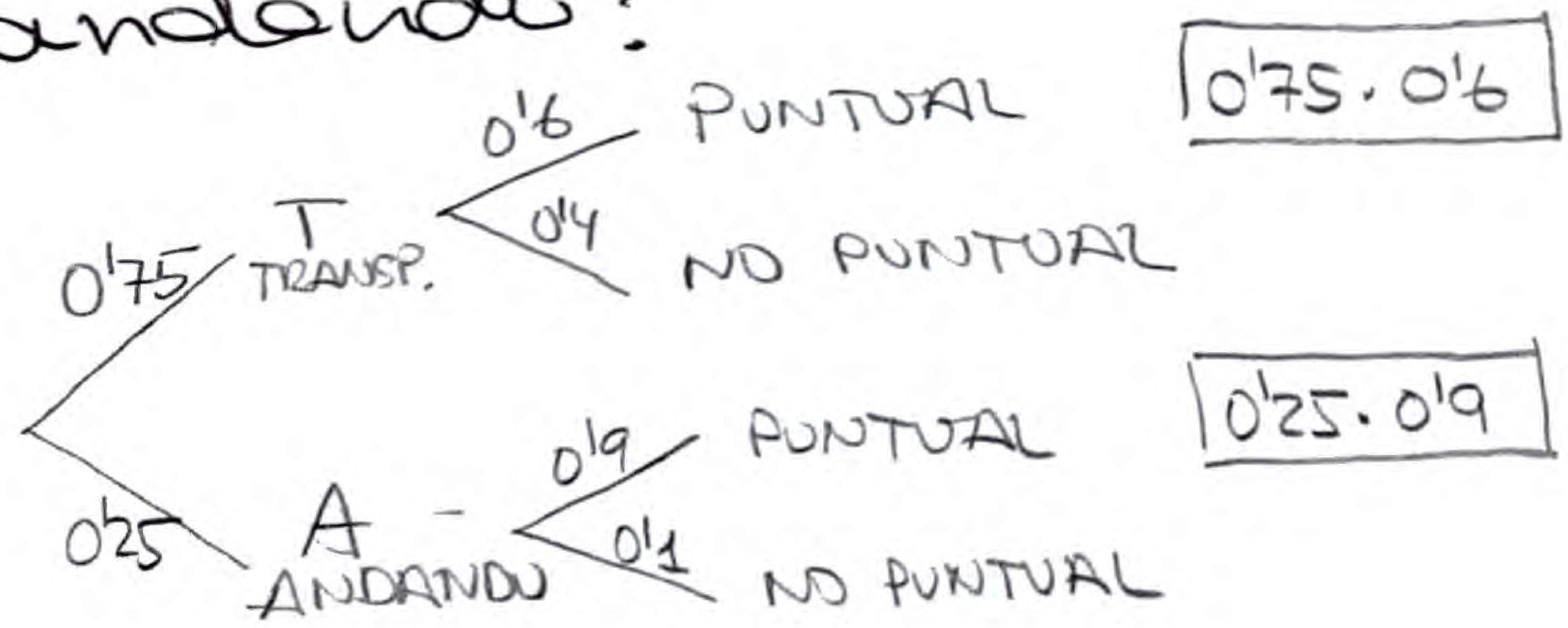
$(+1,-1,0)$ es paralelo a $(2,-2,0)$ pues

$$\frac{+1}{2} = \frac{-1}{-2} = \frac{0}{0}$$

4) El 75% de los alumnos de un instituto acude a clase en algún tipo de transporte y el resto acude andando. Por otra parte, llegan puntual a clase el 60% de los que utilizan transporte y el 90% de los que acuden andando. Se pide

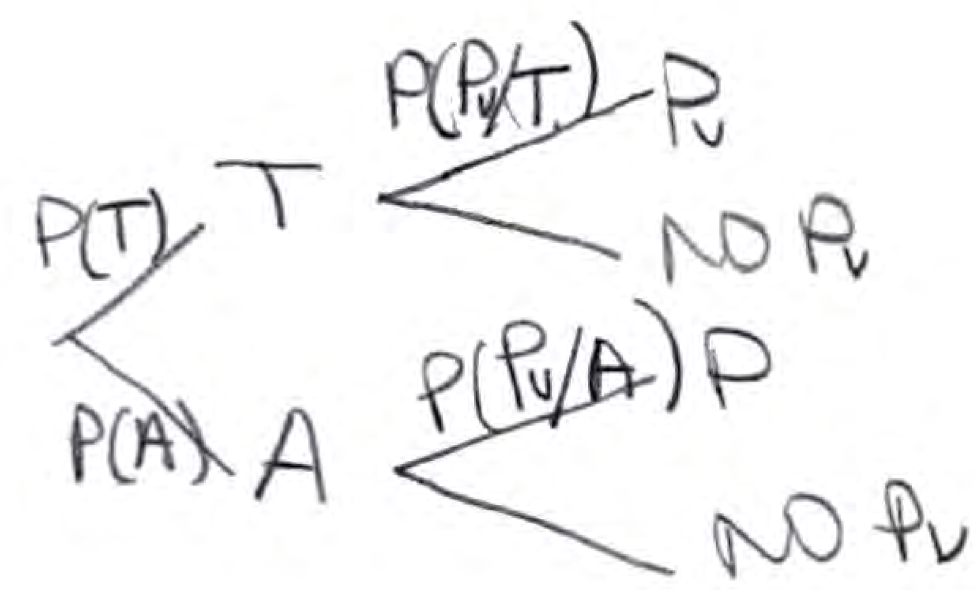
a) Si se elige un alumno al azar ¿cual es la probabilidad de que no haya llegado puntual a clase?

b) Si se elige al azar uno de los alumnos que ha llegado puntual a clase, ¿Cual es la probabilidad de que haya acudido andando?



P_u = PUNTUAL
T = TRANSPORTE
A = ANDANDO

Recordar



a) $P(\overline{P_u}) = 1 - P(P_u) = 1 - (P(T)\cdot P(P_u/T) + P(A)\cdot P(P_u/A)) =$

$= 1 - (0'75 \cdot 0'6 + 0'25 \cdot 0'9) = 1 - \underbrace{0'675}_{\text{Puntual}} =$

$= 0'325$

b) $P(A/P_u) = \dfrac{P(A)\cdot P(P_u/A)}{P(T)\cdot P(P_u/T) + P(A)\cdot P(P_u/A)} = \dfrac{0'25 \cdot 0'9}{0'675} = 0'333$