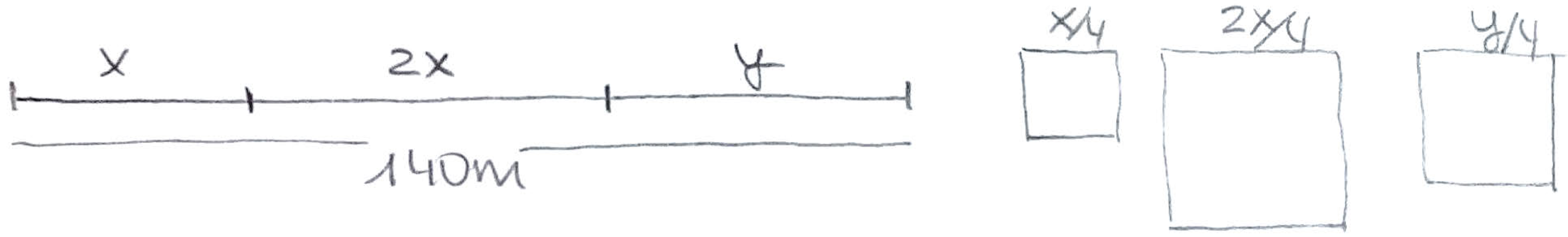
EBAU (17-18)

1

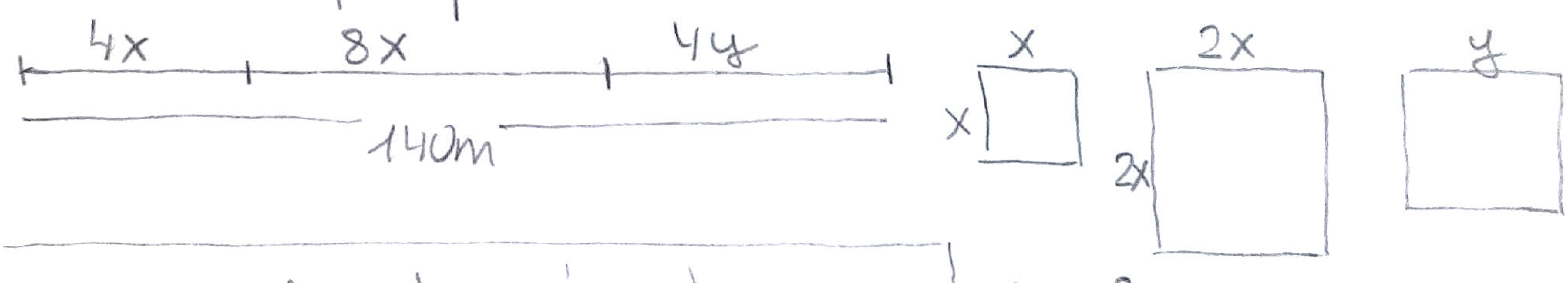
MATEMÁTICAS II JUNIO

OPCIÓN A

1 Se dispone de un hilo metálico de longitud 140m. Se quiere dividir dicho hilo en tres trozos de forma que la longitud de uno de los trozos sea el doble que la longitud de otro y tal que, al construir con cada uno de los tres trozos de hilo un cuadrado, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínima. Encontrar la longitud de cada trozo. (2,5p)



Para mayor facilidad:



1º Busco la relación entre x e y:

$A_1 = x^2$; $A_2 = 4x^2$; $A_3 = y^2$

$4x + 8x + 4y = 140 \Rightarrow$

$\Rightarrow 12x + 4y = 140 \Rightarrow y = \frac{140 - 12x}{4} = \frac{140}{4} - \frac{12}{4}x = 35 - 3x$

$\Rightarrow y = 35 - 3x$

2º Construyo la función a optimizar

$A = A_1 + A_2 + A_3 = x^2 + 4x^2 + y^2 \Rightarrow A = 5x^2 + (35 - 3x)^2 =$

$= 5x^2 + 1225 - 210x + 9x^2 = 14x^2 - 210x + 1225 \Rightarrow$

La función dependiente de x es: $f(x) = 14x^2 - 210x + 1225$

3º Obtenemos su derivada y la igualamos a cero para saber en que valores tiene máximos o mínimos.

$f(x) = 14x^2 - 210x + 1225$; $f'(x) = 24x - 210$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 24x - 210 = 0 \Rightarrow x = \frac{210}{24} = \underline{8'75}$

Un trozo mide $8'75 \times 4 = 35m.$

otro $35 \times 2 = 70m$

y el último $(y = 35 - 3x = 8'75) \Rightarrow 4 \cdot 8'75 = 35m.$

4º Comprobamos que se trata de un mínimo. Calculamos la segunda derivada y comprobamos su signo en: $f''(8'75)$

$f'(x) = 24x - 210 \Rightarrow f''(x) = 24 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f''(8'75) > 0$

La función suma de las tres áreas de los cuadrados presenta un mínimo en $x = 8'75$.

② Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + Ky + Kz = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 2 \end{array}\right\}$$

ⓐ Discutir el sistema según los valores del parámetro K.

ⓑ Resolver el sistema para K=1.

ⓐ

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & K & K & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & K-1 & K-1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2K+2 & -K+1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} -K+1 & -3K+3 & -K+1 \\ K-1 & K-1 & 0 \\ \hline 0 & -2K+2 & -K+1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2-2K & K-1 \end{array}\right)$$

$\underbrace{}_{A}$ $\underbrace{}_{A^*}$

CASO 1.- Si $2-2K=0 \Leftrightarrow 2=2K \Leftrightarrow K=1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$r(A)=2=r(A^*)<3$ nº incognitos

Entonces si $K=1$ se trata de un sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones

CASO 2.- Si $K \neq 1$: $r(A)=3=r(A^*)=3$ número de incog. se trata de un sistema compatible determinado con una única solución

ⓑ Si $K=1$, tenemos que resolver $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Convertimos la matriz en ecuaciones y despejamos x e y en función de z.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ y+3z=1 \end{array}\right\} \longrightarrow \underbrace{y=1-3z}$$

En la prim. ec: $x=1-y-z \overset{\downarrow}{=} 1-(1-3z)-z=1-1+3z-z=$
$=2z$

La solución del sistema para $K=1$ es:

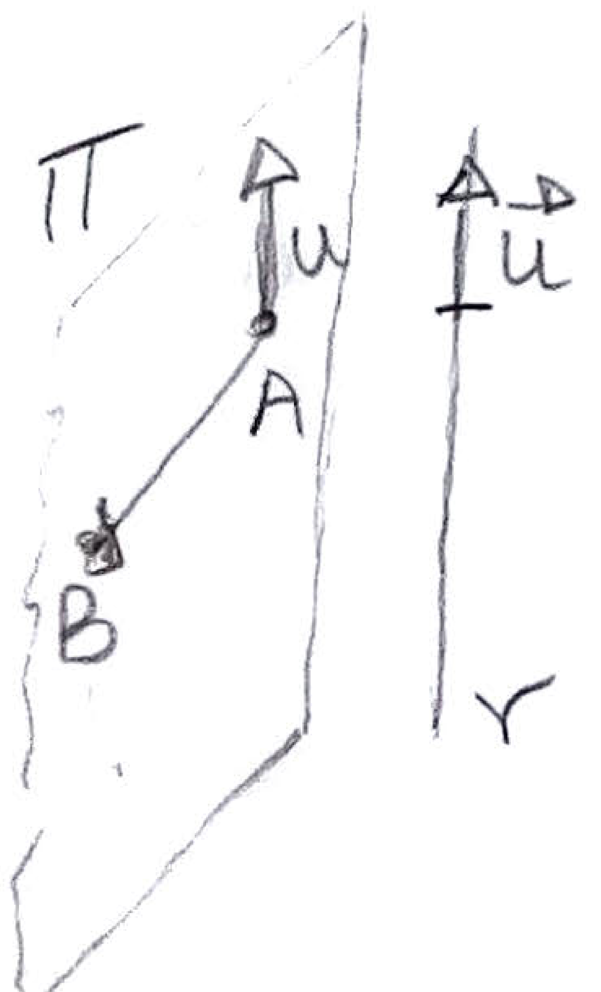
$$\left\{\begin{array}{l} x=2z \\ y=1-3z \end{array}\right.$$ $\forall z \in \mathbb{R}$, infinitas soluciones de un sistema compatible indeterminado

a) 3) Halle la ecuación del plano π que pasa por los puntos: $A(-1,5,0)$ y $B(0,1,1)$ y es paralelo a la recta: $r \equiv \begin{cases} 3x+2y-3=0 \\ 2y-3z-1=0 \end{cases}$

b) Escribir la ecuación de una recta paralela a la recta r y que pase por el punto medio del segmento $\overline{AB}$

Para determinar la ec. del plano π pedido necesitamos dos vectores y un punto.

$$\pi \begin{cases} B(0,1,1) \\ \vec{AB}(1,-4,1) \\ \vec{u} \text{ vector director de la recta } r \end{cases}$$



Hallemos $\vec{u}$ como producto vectorial de los vectores normales de los planos que determinan la recta r

$$\vec{n}_1(3,2,0) \text{ y } \vec{n}_2(0,2,-3)$$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= -6\vec{i} + 9\vec{j} + 6\vec{k} \Rightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{u}(-6,9,6)$$

$$\pi \begin{cases} B(0,1,1) \\ \vec{AB}(1,-4,1) \\ \vec{u}(-6,9,6) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -6 & (x-0) \\ -4 & 9 & (y-1) \\ 1 & 6 & (z-1) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9(z-1)-6(y-1)-24x-9x-6(y-1)-24(z-1)=0 \Rightarrow$$

$$-15(z-1)-12(y-1)-33x=0 \Rightarrow -15z+15-12y+12-33x=0$$

$$\Rightarrow -33x-12y-15z+37=0$$ Ec del plano π pedido

Comprobamos que el vector normal de π: $\vec{n}(-33,-12,-15)$ es perpendicular al vector director de r: $\vec{u}(-6,9,6)$
Su producto escalar será cero
$\vec{n}\cdot\vec{u}=(-33,-12,-15)\cdot(-6,9,6)=(-33)\cdot(-6)+(-12)\cdot 9+(-15)\cdot 6=$
$=+198-108-90=0$ OK!!

(b)

Nos piden una recta $s \parallel r$ que pase por M punto medio del segmento $\overline{AB}$

$$s \equiv \begin{cases} \vec{u} \text{ vector director de } r \ (s \parallel r) \\ A(-1,5,0) \text{ y } B(0,1,1) \\ M\left(\frac{-1+0}{2}, \frac{5+1}{2}, \frac{0+1}{2}\right)=\left(\frac{-1}{2}, 3, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} \vec{u}(-6,9,6) \text{ vector director} \\ \text{Punto } M\left(-\frac{1}{2}, 3, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

La ecuación continua de la recta s es:

$$\frac{x+1/2}{-6}=\frac{y-3}{9}=\frac{z-1/2}{6}$$ Ec. recta pedida.

(4) Se sabe que el 30% de todos los fallos en las tuberías de las plantas químicas son ocasionados por errores del operador.

(a) Cual es la probabilidad de que de 20 fallos, en una planta química, exactamente 5 se deban a errores del operador

(b) ¿Cual es la probabilidad de que 2 o más fallos de 20 encontrados en una planta química, se deban a errores de operador?

a) $p = 0'3$, $q = 1 - 0'3 = 0'7$, $n = 20$ $\quad B(20, 0'3)$
Distribución binomial.

$$P(x=5) = \binom{20}{5} 0'3^5 \cdot 0'7^{15} =$$

b) $B(20, 0'3)$

$$P(x \geq 2) = P(x=2) + P(x=3) + \dots + P(x=20) =$$
$$= 1 - P(x<2) = 1 - [P(x=1) + P(x=0)] =$$
$$=$$

- $P(x=1) = \binom{20}{1} 0'3^1 \cdot 0'7^{19} = 20 \cdot 0'3 \cdot 0'7^{19} =$
- $P(x=0) = \binom{20}{0} 0'3^0 \cdot 0'7^{20} = 1 \cdot 1 \cdot 0'7^{20} =$