Modelo 3

OPCIÓN B

1.- Determinar los valores de a y b para que la función $f(x)=a\sqrt{3x+3}+b\sqrt{x-1}$ tenga un punto de inflexión en el punto (2,8)

Criterios

Si f tiene un punto de inflexión en (2,8) entonces, **(0.5 ptos)**

$f(2)=3a+b=8$

$f''(2)=0$

Hallamos la segunda derivada,

$$f'(x)=\frac{3a}{2\sqrt{3x+3}}+\frac{b}{2\sqrt{x-1}}$$ **(0.5 ptos)**

$$f''(x)=\frac{-9a}{4(3x+3)\sqrt{3x+3}}-\frac{b}{4(x-1)\sqrt{x-1}}$$ **(0.5 ptos)**

$$f''(2)=\frac{-a}{12}-\frac{b}{4}=0\rightarrow a+3b=0$$ **(0.5 ptos)**

Planteamos y resolvemos el sistema,

$$\left.\begin{array}{l}3a+b=8\\a+3b=0\end{array}\right\} \qquad a=3;\ b=-1$$ **(0. 5 ptos)**

2.- Considerar el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l}x+y+z=0\\2x+ky+z=2\\x+y+kz=k-1\end{array}\right\}$

a) Estudiar el sistema para los distintos valores de k

b) Resolver el sistema para $k=1$

Criterios

a) Matriz de los coeficientes $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&k&1\\1&1&k\end{pmatrix}$

Matriz ampliada $A/b=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\2&k&1&2\\1&1&k&k-1\end{pmatrix}$ **(0.25 ptos)**

$\det(A)=k^2-3k+2$; de donde $\det(A)=0$ si $k=1$ o $k=2$ **(0.25 ptos)**

Discusión según los valores del parámetro k (Teorema de Rouche Frobenius)

$k \neq \{1,2\}$ rg A = 3 = rg (A/b) = número de incógnitas. Sistema compatible determinado **(0.25 ptos)**

- Para $k = 1$

Para la matriz ampliada se tiene,

$$A/b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \to rg(A/b) = 2$$ [1ª fila = 3ª fila] **(0.25 ptos)**

$rgA = 2 = rg(A/b) <$ nº de incógnitas $= 3$ Sistema compatible indeterminado **(0.25 ptos)**

- Para $k = 2$

$$A/b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \to rg(A/b) = 3$$

$rgA = 2 \neq 3 = rg(A/b)$ Sistema incompatible **(0.25 ptos)**

b) Para k = 1, el sistema es compatible indeterminado, hallamos la solución en función de un parámetro (existen varias soluciones)

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ 2x+y+z=2 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x+y-z \\ 2x+y=2-z \end{array}\right\} \to x=2;\ \ y=-2-z$$ **(1 pto)**

3.- Dadas las rectas $r_1 \equiv x-1 = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+2}{2}$ y $r_2 \equiv \dfrac{x+5}{4} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+4}{3}$, se pide

a) Demostrar que las rectas r_1 y r_2 son coplanarias.

b) Hallar la ecuación del plano que determinan.

Criterios

Vector director de $r_1 : v_1 = (1,-1,2)$, Punto A de $r_1, A(1,1,-2)$ **(0.25 ptos)**

Vector director de $r_2 : v_2 = (4,-2,3)$, Punto B de $r_2, B(-5,3,-4)$ **(0.25 ptos)**

Vector $\overrightarrow{AB} = (-6,2,-2)$ **(0.25 ptos)**

Si r_1 y r_2 son coplanarias, entonces v_1, v_2 y $\overrightarrow{AB}$ son linealmente dependientes. En efecto, **(0.25 ptos)**

$$\begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \overline{AB} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \\ -6 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 4+18+16-24-6-8=0 \quad \textbf{(0.5 ptos)}$$

b) La ecuación del plano que determinan viene dada por,

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x+5y+2z-2=0 \qquad \textbf{(1 pto)}$$

4.- El 30% de los habitantes de un determinado pueblo ve un concurso de televisión. Desde el concurso se llama por teléfono a 10 personas del pueblo elegidas al azar. Calcular la probabilidad de que, de las 10 personas, estuvieran viendo el programa.

a) Tres o menos personas.

b) Ninguna de las 10 personas.

Criterios

Se define la variable X: ”número de personas que reciben llamada desde el concurso”

“éxito”= Que una persona reciba la llamada del concurso $p = 0.3$ $q = 0.7$

$X \sim B(n,p) = B(10,0.3)$ **(0.5 ptos)**

a) Que 3 o menos personas reciban la llamada

$P(X \leq 3) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) =$ **(0.5 ptos)**

$$= \binom{10}{0} p^0 q^{10} + \binom{10}{1} pq^9 + \binom{10}{2} p^2 q^8 + \binom{10}{3} p^3 q^7 =$$

$$= \frac{10!}{0!(10-0)!}(0.3)^0(0.7)^{10} + \frac{10!}{1!(10-1)!}(0.3)^1(0.7)^9 + \frac{10!}{2!(10-2)!}(0.3)^2(0.7)^8 + \frac{10!}{3!(10-3)!}(0.3)^3(0.7)^7 =$$

$= 0.6496$ **(0.5 ptos)**

b) Ninguna de las 10 personas reciba la llamada

$$P(X=0) = \binom{10}{0} p^0 q^{10} = \frac{10!}{0!(10-0)!}(0.3)^0(0.7)^{10} = 0.0282 \qquad \textbf{(1 pto)}$$