MATEMATICAS II (JULIO)

OPCIÓN B

1 Determinar los valores de a y b para que la función $f(x) = a\sqrt{3x+3} + b\sqrt{x-1}$ tenga un punto de inflexión en el punto (2,8)

1º El punto (2,8) debe pertenecer a la función

2º La derivada segunda en x=2 debe ser cero

1º $f(2)=8 \Rightarrow a\sqrt{3\cdot 2+3}+b\sqrt{2-1}=8 \Rightarrow 3a+b=8 \Rightarrow$

$\Rightarrow b = 8-3a$ (*)1

2º $f'(x) = \left(a(3x+3)^{1/2}\right)' + \left(b(x-1)^{1/2}\right)' = a\cdot\frac{1}{2}(3x+3)^{-1/2}\cdot 3 +$

$+ b\cdot\frac{1}{2}(x-1)^{-1/2}\cdot 1 = \dfrac{3a}{2\sqrt{3x+3}} + \dfrac{b}{\sqrt{x-1}}$

$f''(x) = \left(\frac{3a}{2}\cdot(3x+3)^{-1/2}\right)' + \left(b(x-1)^{-1/2}\right)' = \frac{3a}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(3x+3)^{-3/2}\cdot 3 +$

$+ b\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(x-1)^{-1/2-1} = \frac{3a}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{(3x+3)^3}} - \frac{b}{2}\frac{1}{\sqrt{(x-1)^3}}$ y $f''(2)=0$

$\Rightarrow \frac{3a}{4}\cdot\frac{1}{3^3} - \frac{b}{2}\frac{1}{1} = 0 \Rightarrow \frac{a}{4\cdot 9} - \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow b = \frac{2a}{4\cdot 9} \Rightarrow b = \frac{a}{18}$ (*)2

Resolvemos el sistema $\begin{cases} b = \frac{a}{18} \\ b = 8-3a \end{cases}$ $\Big|$ $\frac{a}{18} = 8-3a \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 18(8-3a) \Rightarrow$

$a = 144 - 54a \Rightarrow 55a = 144 \Rightarrow a = \frac{144}{55} = 2'62$ ② $\begin{array}{r} 18 \\ \times 8 \\ \hline 144 \end{array}$

$b = \frac{a}{18} = \frac{2'62}{18} = 0'15$ $\begin{array}{r} 18 \\ \times 3 \\ \hline 54 \end{array}$

② Considerar el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+Ky+z=2 \\ x+y+Kz=K-1 \end{cases}$

ⓐ Estudiar el sistema para los distintos valores de K

ⓑ Resolver el sistema para K=1.

ⓐ

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & K & 1 & 2 \\ 1 & 1 & K & K-1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & K-2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & K-1 & K-1 \end{array}\right)$$

<u>CASO 1</u>.- Si $K-1=0 \Leftrightarrow K=1$ Tenemos:

$$\underbrace{\underbrace{\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right.}_{A}\left|\begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 0 \end{array}\right)}_{A^*}$$

$r(A) = r(A^*) < 3 = n^o$ incognitas $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

$\Rightarrow$ INFINITAS SOLUCIONES

<u>CASO 2</u>.- Si $K-1 \neq 0 \Leftrightarrow K \neq 1$ Tendremos que $r(A) = r(A^*) = 3 = n^o$ incognitas $\Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

$\Rightarrow$ UNA ÚNICA SOLUCIÓN

$$z = 1 ; \quad (K-2)y - 1 = 2 \Rightarrow y = \frac{3}{K-2} \quad y$$

$$x + \frac{3}{K-2} + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3}{K-2} - 1$$

ⓑ Para $k=1$ $\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ -y-z=2 \end{array}\right\}$

$\forall z \in \mathbb{R}$; $\begin{cases} x=-y-z=-(-z-2)-z=z+2-z=2 \\ y=-z-2 \end{cases}$

$\forall z \in \mathbb{R}$; $\left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=-z-2 \end{array}\right\}$ Infinitas soluciones para $k=1$

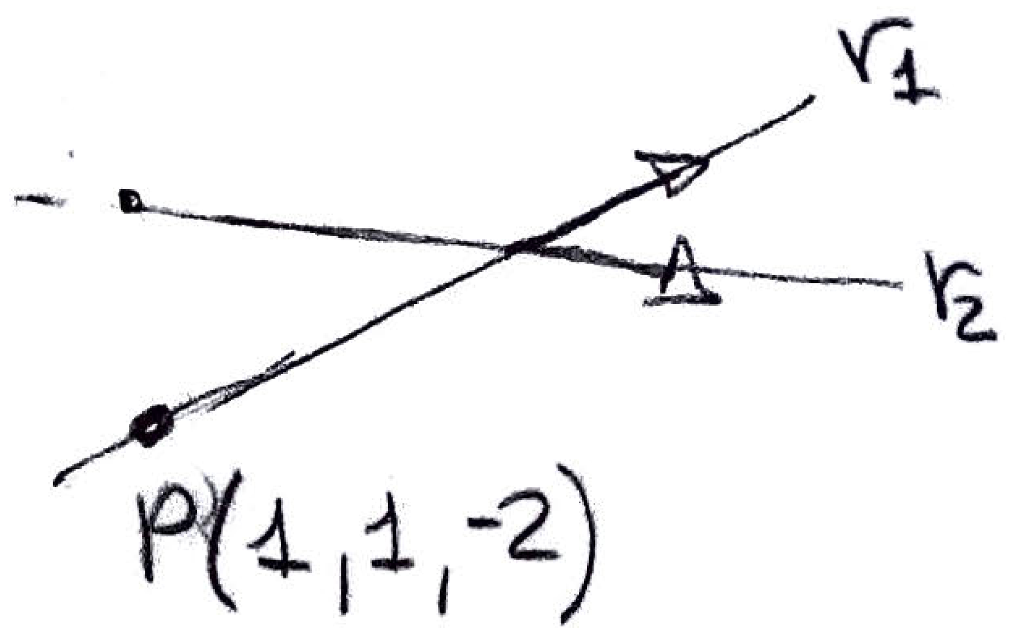
③ Dados los rectas $r_1 \equiv x-1=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$

$r_2 \equiv \dfrac{x+5}{4}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+4}{3}$ } se pide

ⓐ Demostrar que r_1 y r_2 son coplanarias

ⓑ Hallar la ecuación del plano que determinan.

ⓑ $\vec{v}$ vector director de r_1: $\vec{v}(1,-1,2)$
$\vec{u}$ vector director de r_2: $\vec{u}(4,-2,3)$ } $\dfrac{1}{4} \neq \dfrac{-1}{-2} \neq \dfrac{2}{3}$ No son paralelas



$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & x-1 \\ -1 & -2 & y-1 \\ 2 & 3 & z+2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow -2(z+2)+8(y-1)-3(x-1)+4(x-1)-3(y-1)+4(z+2)=0$

$2(z+2)+5(y-1)+(x-1)=0 \Rightarrow 2z+4+5y-5+x-1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x+5y+2z-2=0$ Plano que los contiene

a) Demostrar que r_1 y r_2 son coplanarios

Como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son paralelos, verificamos que siendo $P \in r_1$; $P(1,1,-2)$ y $Q \in r_2$; $Q(-5,3,-4)$ $\vec{PQ}, \vec{u}, \vec{v}$ son linealmente dependientes

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ OK!

4) El 30% de los habitantes de un determinado pueblo ve un concurso de televisión. Desde el concurso se llama por teléfono a 10 personas del pueblo elegidas al azar. Calcule la probabilidad de que, de las 10 personas elegidas, estuvieran viendo el concurso:

a) Tres o menos personas

b) Ninguna de las 10 personas a las que se ha llamado

$p = \frac{30}{100} = 0'3$, $n = 10$ $B(10, 0'3)$

$q = 1 - 0'3 = 0'7$

a) $P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 0'649$

$P(X=0) = \binom{10}{0} 0'3^0 \cdot 0'7^{10} = 1 \cdot 1 \cdot 0'7^{10} = 0'028$

$P(X=1) = \binom{10}{1} 0'3^1 \cdot 0'7^9 = 10 \cdot 0'3 \cdot 0'7^9 = 0'121$

$$P(x=2) = \binom{10}{2} 0'3^2 \cdot 0'7^8 = \frac{10!}{8!\,2!}\, 0'3^2 \cdot 0'7^8 = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}\, 2} \cdot 0'3^2 \cdot 0'7^8 = 45 \cdot 0'3^2 \cdot 0'7^8 =$$
$$= \underline{0'233}$$

$$P(x=3) = \binom{10}{3} 0'3^3 \cdot 0'7^7 = \frac{10!}{\cancel{7!} \cdot 3!}\, 0'3^3 \cdot 0'7^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}\; 3 \cdot 2} \cdot 0'3^3 \cdot 0'7^7 =$$
$$= 5 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 0'3^3 \cdot 0'7^7 = \underline{0'267}$$

b) Ninguna de los 10 ; $P(x=0) = \binom{10}{0} 0'3^0 \cdot 0'7^{10} = 0'7^{10} = 0'028$