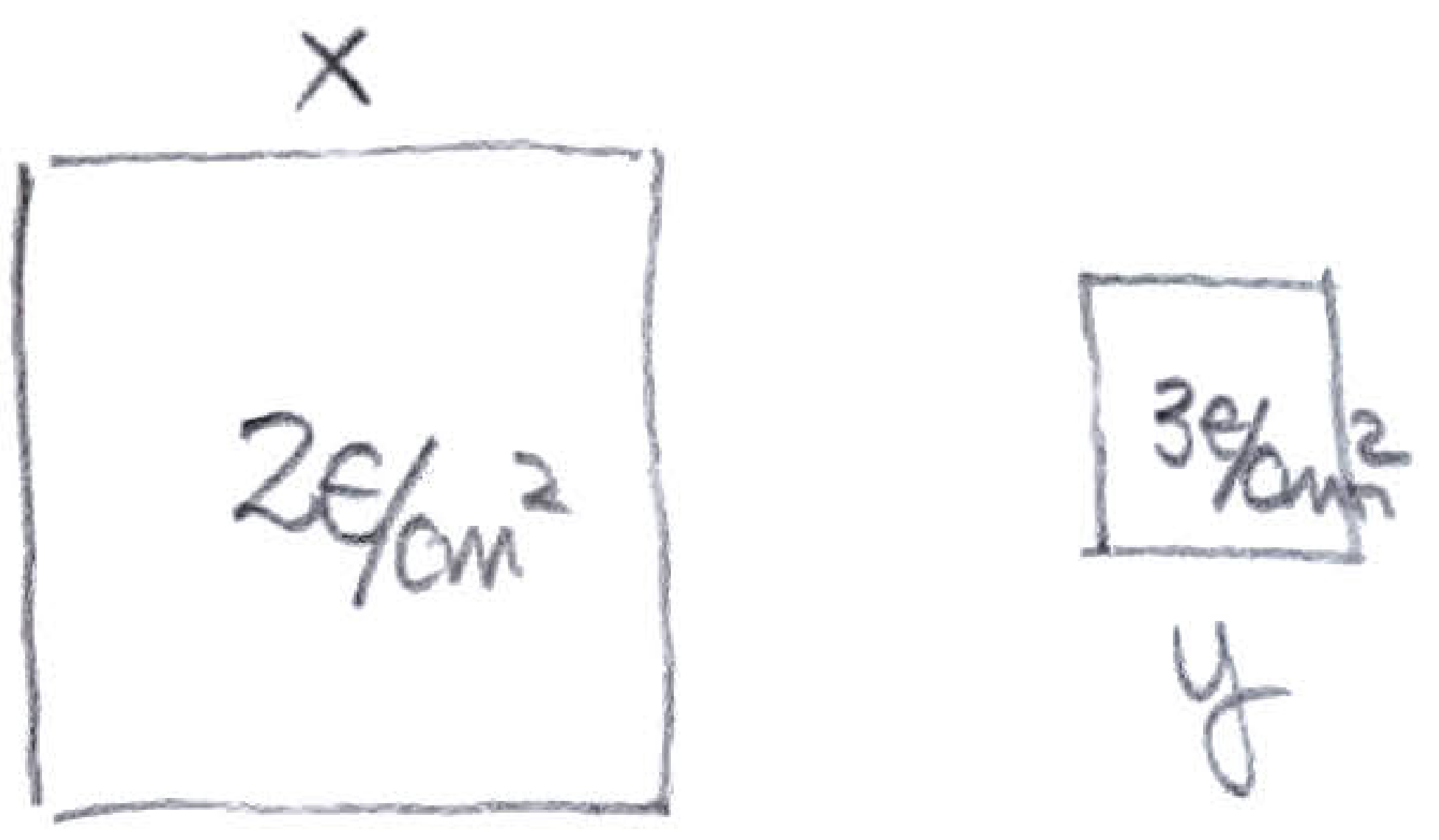
MATEMÁTICAS II (JULIO)

OPCIÓN A

① Tenemos que hacer dos cuadrados de tela, donde cada cuadrado se hace con una tela diferente. Las dos telas tienen precios de 2 y 3 euros por centímetro cuadrado respectivamente. Como hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo y si además nos piden que la suma de los perímetros de los dos cuadrados ha de ser 100cm (2,5 p)



COSTE TOTAL MÍNIMO

$P_1=4x$ $P_2=4y$ $100=P_1+P_2 \Rightarrow 4x+4y=100$

1° Buscamos relación entre las variables x e y

$$4x+4y=100 \Rightarrow y=\frac{100-4x}{4}=25-x \Rightarrow \underline{y=25-x}$$

2° Buscamos la función a optimizar

Área del cuadrado 1: $A_{C_1}=x^2$ y cuesta 2€/cm² $\Rightarrow P_{C_1}=2x^2$

Área del cuadrado 2: $A_{C_2}=y^2$ y cuesta 3€/cm² $\Rightarrow P_{C_2}=3y^2$

$$P=P_{C_1}+P_{C_2}=2x^2+3y^2 \overset{y=25-x}{\overset{\uparrow}{=}} 2x^2+3(25-x)^2=2x^2+3(625-50x+x^2)=$$

$$=2x^2+1875-150x+3x^2=5x^2-150x+1875$$

La función es $f(x)=5x^2-150x+1875$

3° Calculamos $f'(x)$ y obtenemos los $x \in \mathbb{R} / f'(x)=0$ estos puntos seran los extremos relativos

$$f'(x) = 10x - 150 \; ; \; f'(x) = 0 \Rightarrow 10x - 150 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 15}$$

$$x = 15 \text{ e } y = 25 - x = 25 - 15 = 10 \quad \boxed{y = 10}$$

4° Comprobamos que se trata de un mínimo viendo el signo de $f''(x)$ en $x=15$ $f''(15)$

$$f''(x) = (10x - 150)' = 10 > 0 \text{ Mínimo en todo } \mathbb{R}$$

$$f''(15) > 0$$

Obtendremos un precio mínimo con un cuadrado de la tela de 2€/cm² de lado 15cm y otro cuadrado de la otra tela de 3€/cm² de lado 10cm.

② Determinar una matriz X que verifique la ecuación $A \cdot B - CX = I$, siendo las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Preparamos la ecuación matricial, despejando X.

$$A \cdot B - CX = I \Rightarrow -CX = I - A \cdot B \Rightarrow C \cdot X = A \cdot B - I$$

$$\Rightarrow C^{-1}(C \cdot X) = C^{-1}(A \cdot B - I) \Rightarrow (C^{-1}C) \cdot X = C^{-1}(A \cdot B) - C^{-1}I$$

$$\Rightarrow I \cdot X = C^{-1} \cdot A \cdot B - C^{-1} \cdot I \Rightarrow X = C^{-1} \cdot A \cdot B - C^{-1}$$

$X = C^{-1} \cdot A \cdot B - C^{-1}$

Necesitamos calcular C^{-1} y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $|C| = 2 \neq 0$

luego existe C^{-1}

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$. Comprobamos que $C \cdot C^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ok!}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 6 & 27 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -5/2 \\ 6 & -5/2+27 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -5/2 \\ 6-\frac{1}{2} & -5/2+27-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -5/2 \\ \frac{11}{2} & \frac{47}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/2 & -5/2 \\ 11/2 & 47/2 \end{pmatrix}$$

$-\frac{5}{2} + 26 = \frac{-5+52}{2}$

$$\begin{array}{r} 52 \\ -\ 5 \\ \hline 7 \end{array}$$

③ Estudiar la posición relativa de los planos:

$\alpha: 2x+3y-5z+7=0$

$\beta: 3x+2y+3z-1=0$

$\gamma: 7x+8y-7z+13=0$

$$\begin{cases} 2x+3y-5z=-7 \\ 3x+2y+3z=1 \\ 7x+8y-7z=-13 \end{cases}$$

Veamos si las posiciones relativas agrupando los planos dos a dos:

α y β $\begin{cases} \vec{n_1}(2,3,-5) \\ \vec{n_2}(3,2,3) \end{cases}$ $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{2} \neq \frac{-5}{3}$ No son paralelos

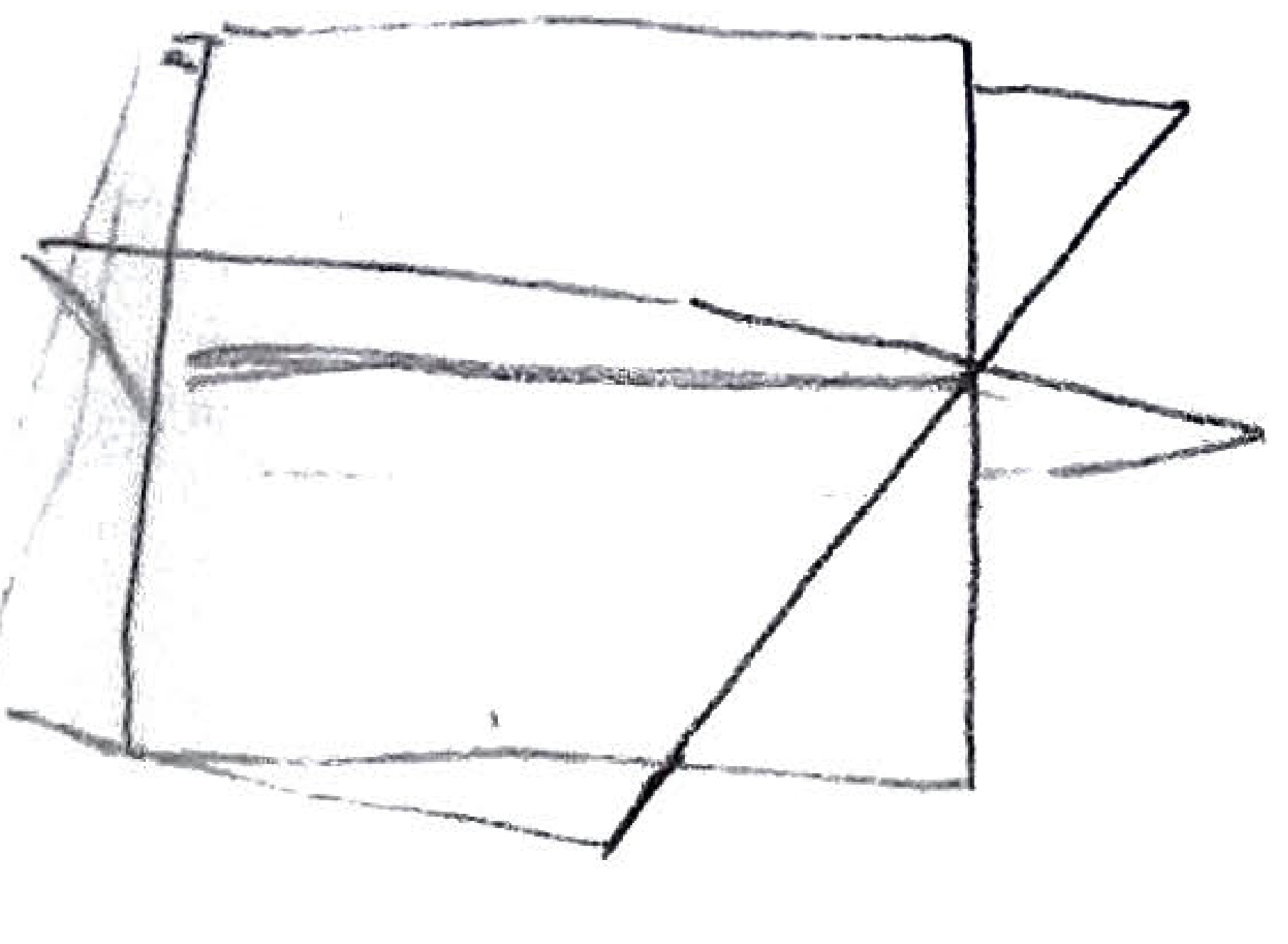
β y γ $\begin{cases} \vec{n_2}(3,2,3) \\ \vec{n_3}(7,8,-7) \end{cases}$ $\frac{3}{7} \neq \frac{2}{8} \neq \frac{3}{-7}$ No son paralelos

α y γ $\begin{cases} \vec{n_1}(2,3,-5) \\ \vec{n_3}(7,8,-7) \end{cases}$ $\frac{2}{7} \neq \frac{3}{8} \neq \frac{5}{7}$ No son paralelos

Estudiemos el sistema formado por sus ecuaciones

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -5 & -7 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & -7 & -13 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=2\cdot F_3-7F_1]{F_2=2F_2-3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -5 & -7 \\ 0 & -5 & 21 & 23 \\ 0 & -5 & 21 & 23 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_3-F_2]{} \overset{A}{\underset{A^*}{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -5 & -7 \\ 0 & -5 & 21 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}}$$

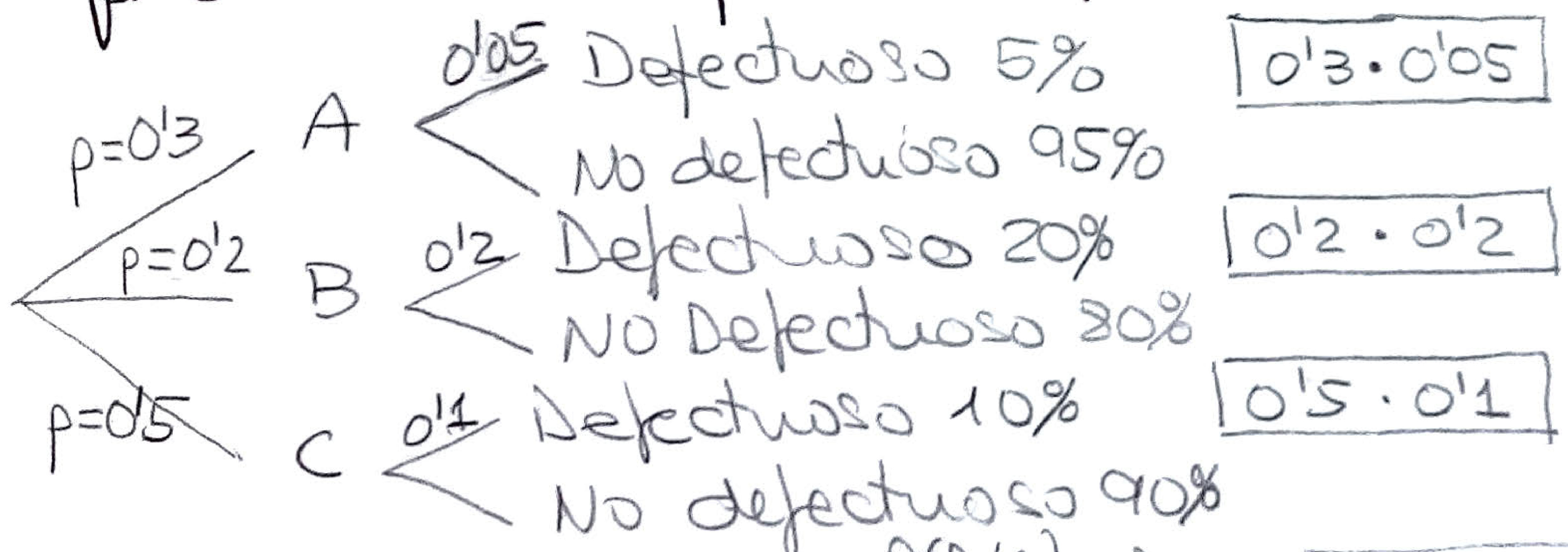
Tenemos $r(A)=r(A^*)=2$ Los tres planos se cortan en una recta.



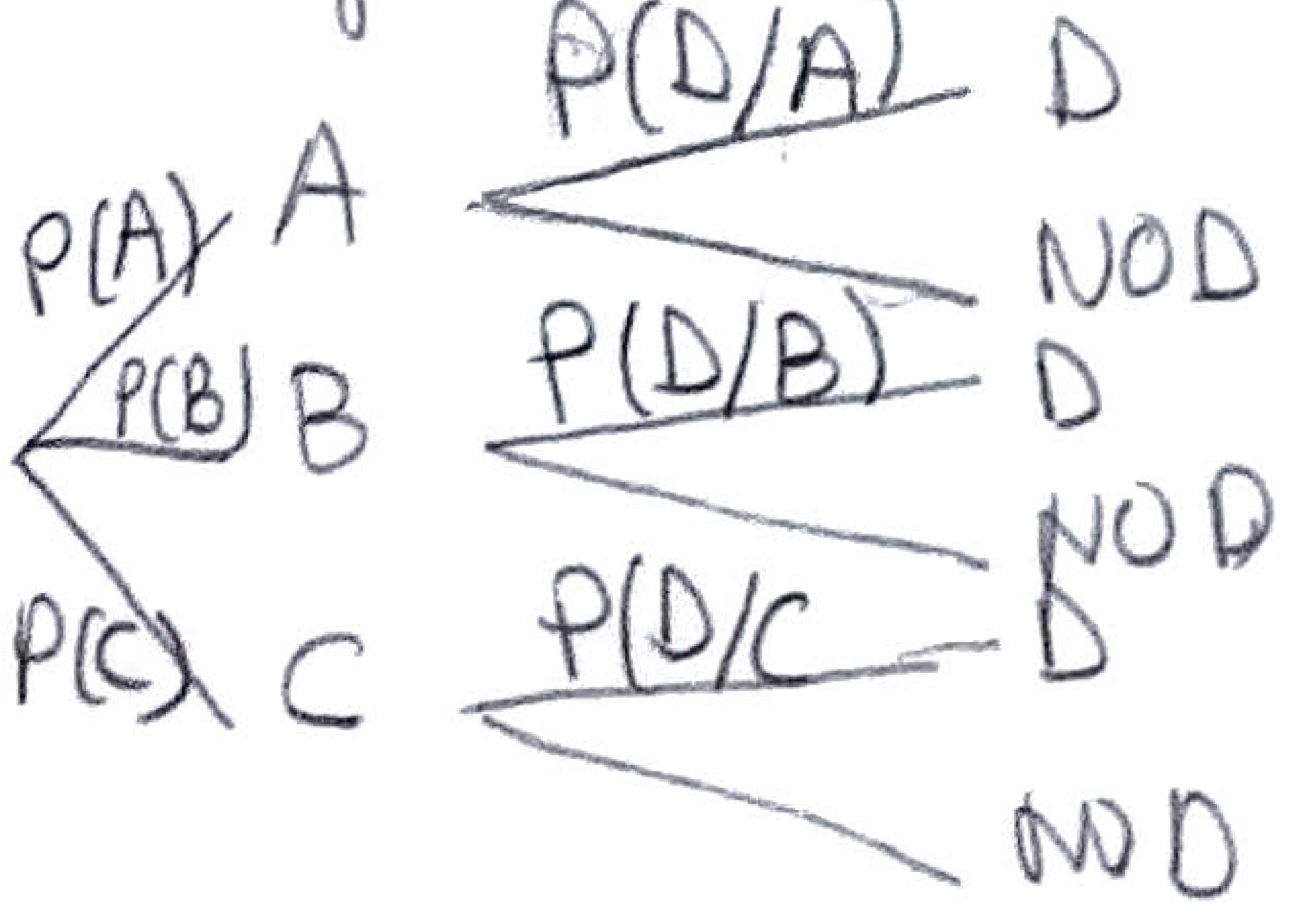
④ Tres fábricas A, B y C producen respectivamente 30%, 20% y 50% de los motores agrícolas que se demandan en la industria. Los inspectores de calidad saben que son defectuosos el 5% de los motores producidos por la fábrica A, el 20% de los producidos por la fábrica B y el 10% de los que se fabrican en la C

ⓐ Un inspector de calidad elige un motor al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que esté defectuoso?

ⓑ Si el inspector comprueba que el motor agrícola que elige está defectuoso, ¿Cuál es la probabilidad de que no haya sido producido por la fábrica C



Recordar



$$\boxed{P(D) = P(A)\cdot P(D/A) + P(B)\cdot P(D/B) + P(C)\cdot P(D/C)}$$

ⓐ $P(D) = 0'3\cdot 0'05 + 0'2\cdot 0'2 + 0'5\cdot 0'1 = 0'105$

0'105 es la probabilidad de que el inspector al elegir un motor al azar, este sea defectuoso.

ⓑ La probabilidad de que no haya sido producido por la fábrica C será 1-(probabilidad de que haya sido producido por la fábrica C)

$\rightsquigarrow P(\bar{C}/D) = 1 - P(C/D)$

Por el teorema de Bayes:

$$P(C/D) = \frac{P(C) \cdot P(D/C)}{P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C)} =$$

$$= \frac{0'5 \cdot 0'1}{0'105} = 0'476$$

La probabilidad de que no haya sido producido por la fábrica C es:

$$1 - 0'476 = 0'524$$