EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2018–2019

MATERIA: MATEMÁTICAS II	**(1)**
Convocatoria:	

Instrucciones:

. Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.

. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

. Se permite la utilización de calculadora científica, no programable ni con conexión a la red.

OPCIÓN B

1. Dada la siguiente expresión de la función *f*, de la que se desconocen algunos valores:

$$f(x) = \begin{cases} a - x & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{b}{x} - \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calcular los valores de *a* y *b* para que *f* sea derivable en todo su dominio. Escribir la función resultante.

SOLUCIÓN

La función dada está definida por partes, y es continua tanto para valores de $x \leq 1$ como $x > 1$. Analizamos su continuidad en *x* = 1

Criterio de continuidad (completo, incluso f(1))

f es continua si

1) $\exists f(1)$

2) $\exists \lim_{x\to 1} f(x)$

3) $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$

Comprobamos $f(1) = a - 1$

Hallamos $\lim_{x\to 1} f(x)$ comprobando para qué valores de *a* y *b*si sus límites laterales existen y son iguales

$$\lim_{x\to 1^-} (a - x) = a - 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} (\frac{b}{x} - lnx) = b - 0$$

Por tanto, los límites laterales son iguales si$b = a - 1$ (I)

La función es continua si se cumple $b = a - 1$

Comprobamos derivabilidad en *x*=1. Esta exigencia es mayor, pero con ella aseguramos que sea derivable.

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 1 \\ \frac{-b}{x^2} - \frac{1}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Hallamos los límites laterales,

$$\lim_{x \to 1^-} (-1) = -1$$
$$\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{-b}{x^2} - \frac{1}{x}\right) = -b - 1$$

Los límites laterales son iguales si $-b - 1 = -1 \to b = 0$

Y sustituyendo en (I) obtenemos $a = 1$

Conclusión: la función es continua y derivable en *x* = 1 para *a* = 1 y *b* = 0

La función que resulta es

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & six \leq 1 \\ -lnx, & six > 1 \end{cases}$$

2. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{2X + 3Y = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix}} \\ \\ \mathbf{X - 2Y = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix}} \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN

$$\left.\begin{array}{r} 2X + 3Y = A(I) \\ X - 2Y = B(II) \end{array}\right\} \to -2(II) \to \left.\begin{array}{r} 2X + 3Y = A \\ -2X + 4Y = -2B \end{array}\right\} \to (I) - 2(II) \to 7Y = A - 2B \to$$

$$Y = \frac{1}{7}(A - 2B)$$

$$X = \frac{1}{2}(A - 3Y)$$

$$Y = \frac{1}{7}(A - 2B) = Y = \frac{1}{7}\left(\begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix}\right) =$$
$$\frac{1}{7}\left(\begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 4 & 4 \\ -14 & 6 & -2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{7}\left(\begin{pmatrix} 14 & -7 & 0 \\ 21 & -7 & 14 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{2}(A-3Y)=X=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}8 & -3 & 4\\ 7 & -1 & 12\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}8 & -3 & 4\\ 7 & -1 & 12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & -3 & 0\\ 9 & -3 & 6\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ -2 & 2 & 6\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

3. Se consideran los puntos A$(2,-1,1)$ y B$(-2,3,1)$ que determinan la recta r

a) Calcular la recta perpendicular a r que pasa por el punto P$(-4,17,0)$

b) Calcular la ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos.

SOLUCIÓN

a) Calcular la recta perpendicular a r que pasa por el punto P$(-4,17,0)$

La recta *r* tiene por vector director $\overrightarrow{AB}=$ (-4, 4, 0)

La ecuación paramétrica (usando A) de la recta es: $r\equiv\begin{cases}x=2-4t\\ y=-1+4t\\ \mathrm{z}=1\end{cases}, t\in\mathbb{R}$

La ecuación paramétrica (usando B) de la recta es: $r\equiv\begin{cases}x=-2-4t\\ y=3+4t\\ \mathrm{z}=1\end{cases}, t\in\mathbb{R}$

Construimos el vector de un punto cualquiera de la recta *r* al punto P dado,

$\overrightarrow{PX}$ (6-4t, -18+4t, 1) (usando A); $\overrightarrow{PX}$ (2-4t, -14+4t, 1) (usando B)

El producto escalar tiene que ser cero para que sean perpendiculares:

$\overrightarrow{PX}\cdot\overrightarrow{AB}$ = -24+16*t* – 72 + 16 *t* = 0; -96 + 32 *t* = 0; *t* = 3 (usando A)

$\overrightarrow{PX}\cdot\overrightarrow{AB}$ = -8+16 *t* – 56 +16 *t* = 0; -64 + 32 *t* = 0; *t* = 2 (usando B)

En ambos casos,

Por tanto, el vector perpendicular es: $\overrightarrow{PX=}$(-6, -6, 1)

Y la ecuación de la recta buscada es: $s\equiv\begin{cases}x=-4-6\mu\\ y=17-6\mu\\ z=\mu\end{cases}, \mu\in\mathbb{R}$

$$s\equiv\frac{x+4}{-6}=\frac{y-17}{-6}=z$$

(*Cualquiera de las dos ecuaciones*)

b) El vector $\overrightarrow{AB=}$ (-4, 4, 0) será el vector director de la recta que contiene a los puntos A y B, pero también el vector normal del plano del que son simétricos.

Ecuación general del plano: - 4*x* + 4*y* + D = 0

Buscamos el punto medio M del segmento AB que será el punto que estará en el plano de simetría:

M = A + ½ $\overrightarrow{AB}$ = (2, -1, 1) + (-2, 2, 0) = (0, 1, 1)

Este punto estará en el plano: -4·0+4·1+D=4+D=0; luego D= -4

Por tanto el plano de simetría es: - 4x + 4y = 4; o lo que es lo mismo: - x + y = 1

4. Una planta ensambladora de circuitos recibe componentes procedentes de tres fabricantes A, B y C. El 50% del total de los componentes se compra al fabricante A, mientras que a los fabricantes B y C se le compra un 25% a cada uno. El porcentaje de componentes defectuosos es de un 5% para el fabricante A, el 10% para el fabricante B y el 12% para el fabricante C.

a) Construir el diagrama de árbol con las probabilidades asignadas.

b) El Departamento de Control de la Calidad escoge un circuito al azar en el almacén, hallar la probabilidad de que contenga componentes defectuosos.

c) Escogido al azar un circuito que no tiene componentes defectuosos, ¿qué porcentaje de dichos componentes han sido vendidos por el proveedor B?

SOLUCIÓN

Se definen los eventos:

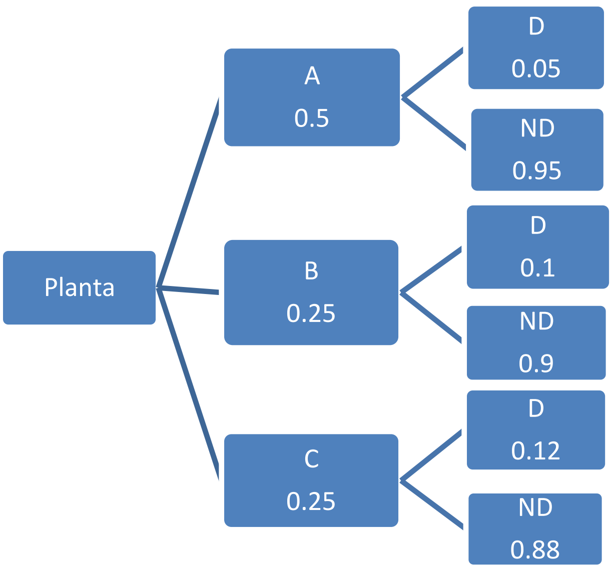
A: componentes fabricados por el fabricante A

B: componentes fabricados por el fabricante B

C: componentes fabricados por el fabricante C

D: circuito con componentes defectuosos

a) Construir el diagrama de árbol con las probabilidades asignadas.



b) El Departamento de Control de la Calidad escoge un circuito al azar en el almacén, hallar la probabilidad de que contenga componentes defectuosos.

Aplicando el Teorema de la Probabilidad Total,

P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C)=

= (0.5) (0.05) + (0.25) (0.1) + (0.25) (0.03) = 0.08

Existe un 8% de probabilidad de que un circuito ensamblada en la planta contenga componentes defectuosos.

c) Escogido al azar un circuito que no tiene componentes defectuosos, ¿qué porcentaje de dichos componentes han sido vendidos por el proveedor B?

Teorema de Bayes

$$P(B/ND) = \frac{P(B)P(ND/B)}{P(ND)} = \frac{0.25(1-0.1)}{(1-0.08)} = 0.2445$$

Existe un 24.5% de probabilidad de que un circuito que no tiene componentes defectuosos, dichos componentes hayan sido vendidos por el proveedor B