EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2018–2019

MATERIA: MATEMÁTICAS II	**(1)**
Convocatoria:	

Instrucciones:
. Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.
. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.
. Se permite la utilización de calculadora científica, no programable ni con conexión a la red.

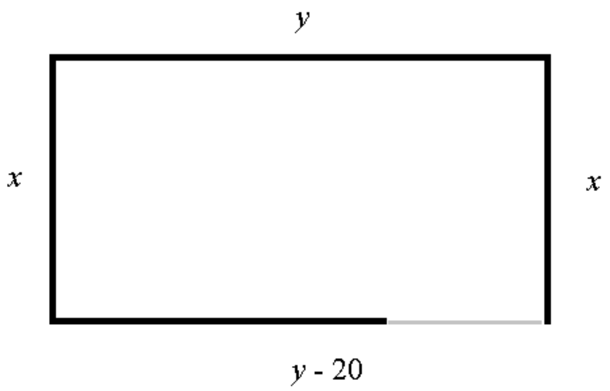
SE PROPONE UNA SOLUCIÓN CORRECTA
OTRAS SOLUCIONES CORRECTAS TAMBIÉN SE ACEPTAN

OPCIÓN A

1. Se desea vallar un terreno rectangular usando 100 metros de una tela metálica. Se ha decidido dejar una abertura de 20 metros sin vallar en uno de los lados de la parcela para colocar una puerta. Calcular las dimensiones de todos los lados de la parcela rectangular de área máxima que puede vallarse de esa manera. Calcular el valor de dicha área máxima.

SOLUCIÓN

Construimos el recinto rectangular (*no se pide dibujarlo)*



El perímetro de la valla viene dado por $P = x + y + x + y - 20 = 100\ m$

Siendo el área del terreno a vallar $A = x \cdot y$

De donde,

$2x + 2y - 20 = 100 \rightarrow 2x + 2y = 120 \rightarrow x + y = 60 \rightarrow y = 60 - x$

Sustituyendo en la función del área se obtiene,

$A = x \cdot y = x(60 - x) = 60x - x^2$

Hallamos la primera derivada del área para calcular el punto crítico,

$A' = 60 - 2x$

Igualamos a cero $60 - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{60}{2} \rightarrow x = 30$

Comprobamos si es máximo o mínimo mediante el criterio de la segunda derivada,

$A'' = -2 < 0$, podemos afirmar que existe un máximo en *x* = 30 *m*

Las dimensiones del terreno de área máxima serán

x =30 *m* ; *y* = 30 *m* siendo el área: 900 m^2

2. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y sea I_2 la matriz identidad de orden 2

a) Calcular el valor de *x* de modo que se verifique la igualdad: $B^2 = A$

b) Calcular el valor de *x* para que $A - I_2 = B^{-1}$

c) Calcular el valor de *x* para que $A \cdot B = I_2$

SOLUCIÓN

a) Calcular el valor de *x* de modo que se verifique la igualdad: $B^2 = A$

$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Entonces si $B^2 = A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + 1 = 2 \rightarrow x = 1$

b) Calcular el valor de *x* para que $A - I_2 = B^{-1}$

Calculemos que es posible calcular la matriz inversa de *B*

Comprobamos que es una matriz regular $|B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists\, B^{-1}$

$\left.\begin{matrix} B_{11} = 1;\ B_{12} = -1 \\ B_{21} = -1; B_{22} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Adj(B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow [Adj(B)]^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot \left(Adj(B)\right)^t = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Por otro lado,

$A - I_2 = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$

La igualdad se cumple si,

$A - I_2 = B^{-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 0$

c) Calcular el valor de *x* para que $A \cdot B = I_2$

$A \cdot B = I_2 \Leftrightarrow A = B^{-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -1$

3. Dados los planos $\pi_1 \equiv x - y + 3 = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x + y - z = 0$, calcular:

a) La ecuación de la recta s paralela a los planos π_1 y $\pi_2$que pasa por el punto B$(2, 2, 3)$

b) El ángulo que forman los planos π_1 y π_2

SOLUCIÓN

a) La ecuación de la recta s paralela a los planos π_1 y $\pi_2$que pasa por el punto B$(2, 2, 3)$

Sean $\overrightarrow{A_1} = (1, -1, 0)$ y $\overrightarrow{A_2} = (2, 1, -1)$

los vectores normales a los planos π_1 y π_2 respectivamente, entonces el vector dirección de la recta s paralela a ambos planos viene dado por $\overrightarrow{v_s} = A_1 \times A_2 = (1, 1, 3)$

Con vector y punto damos la ecuación de la recta s.

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 + \mu \\ y = 2 + \mu \\ z = 3 + 3\mu \end{cases}, \mu \in \mathbb{R} \Longrightarrow s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$$

b) El ángulo que forman los planos π_1y π_2

El ángulo α formado por los planos π_1 y π_2 es el mismo que forman los vectores perpendiculares a cada uno de ellos. Si observamos las ecuaciones generales de los planos π_1 y $\pi_2$dos vectores perpendiculares a cada uno de ellos serán: $\overrightarrow{A_1} = (1, -1, 0)$ y $\overrightarrow{A_2} = (2, 1, -1)$

Por tanto,

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{A_1} \cdot \overrightarrow{A_2}|}{|\overrightarrow{A_1}| \cdot |\overrightarrow{A_2}|} = \frac{|1.2 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{2 - 1 + 0}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \Longrightarrow \alpha = 73'22º$$

4. En un banco se sabe que el tiempo de devolución de un préstamo de 18000€ sigue una distribución normal de media 60 meses y desviación típica 8 meses. Se elige al azar un préstamo de 18000€ realizado en dicho banco:

a) Calcular la probabilidad de que dicho préstamo se devuelva como mucho en 70 meses.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que fuera devuelto, al menos en 4 años?

c) ¿Qué porcentaje de préstamos de 18000€ del mismo banco se formalizan para ser devueltos entre los 4 y los 6 años?

SOLUCIÓN

Definimos la variable X : “tiempo de devolución de un préstamo de 18000€”

X ~ N (60, 8)

a) Calcular la probabilidad de que dicho préstamo se devuelva como mucho en 70 meses.

P(X < 70) = P(Z < $\frac{70-60}{8}) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} < 1.25) = 0.8944$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que fuera devuelto, al menos en 4 años?

P (X > 4) = $\left(\mathrm{Z} > \frac{48-60}{8}\right) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} > -1.5) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} < 1.5) = 0.9332$

c) ¿Qué porcentaje de préstamos de 18000€ del mismo banco se formalizan para ser devueltos entre los 4 y los 6 años?

P (4 < X < 6) = $\mathrm{P}(48 < \mathrm{X} < 72) = \mathrm{P}(\mathrm{X} < 72) - \mathrm{P}(\mathrm{Z} < 48) =$

$$= P(\mathrm{Z} < 1.5) - P(\mathrm{Z} < -1.5) = 0.9332 - (1 - 0.9332) =$$

$$= 0.9332 - 0.0668 = 0.8664\ ;\ 86{,}64\%$$