EBAU (18-19)

MATEMÁTICAS II (JULIO)
OPCIÓN B

1 Dada la parábola de ecuación: $y = 4 - x^2$ y la recta de ecuación: $y = x + 2$

a) Hallar los puntos de intersección entre las curvas anteriores

b) Esbozar el gráfico señalando el recinto limitado por ambas curvas

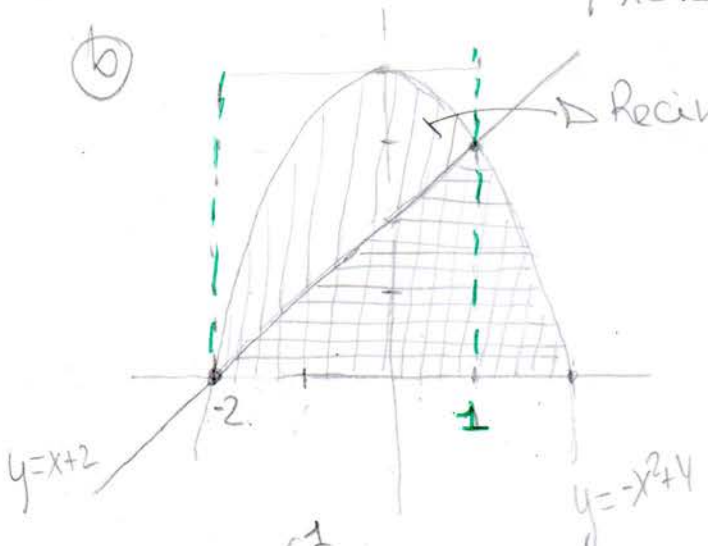
c) Calcular el área del recinto delimitado por ambas curvas.

a) $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow x + 2 = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-4}{2} = -2 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$

Intersección en $\begin{cases} x = -2 & (-2, 0) \\ x = +1 & (+1, 3) \end{cases}$ ✓

b)



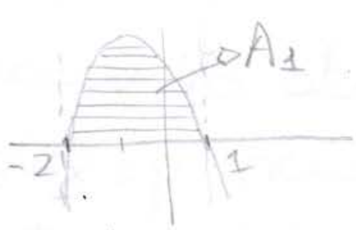
x	$-x^2+4$
2	$-4+4=0$
-2	$-4+4=0$
0	4 VÉRTICE

c) $A = \int_{-2}^{1} (-x^2 + 4 - (x+2))\,dx = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{2x}{1} \right]_{-2}^{1} =$

$$\left(-\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}+2\cdot 1\right)-\left(-\frac{(-2)^3}{3}-\frac{(-2)^2}{2}+2\cdot(-2)\right)=\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)-\left(\frac{8}{3}-\frac{4}{2}-4\right)=$$ 2

$$=\left(\frac{-5}{6}+2\right)-\left(\frac{16-12}{6}-4\right)=\frac{-5+12}{6}-\frac{4-24}{6}=\frac{7}{6}+\frac{20}{6}=\frac{27}{6}=$$

$$=\frac{9}{2}\,u^2$$ ✓



- COMPROBAMOS:
  $A=A_1-A_2$

$$A_1=\int_{-2}^{1}(-x^2+4)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{1}=\left(-\frac{(1)^3}{3}+4\cdot 1\right)-\left(-\frac{(-2)^3}{3}+4(-2)\right)=$$

$$=\left(\frac{-1}{3}+4\right)-\left(\frac{8}{3}-8\right)=\frac{-1+12}{3}-\frac{8-24}{3}=$$

$$=\frac{11}{3}-\frac{-16}{3}=\frac{11+16}{3}=\frac{27}{3}=9\,u^2$$

$$A_2=\int_{-2}^{1}(x+2)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}=\left(\frac{1^2}{2}+2\cdot 1\right)-\left(\frac{(-2)^2}{2}+2(-2)\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}+2\right)-\left(2-4\right)=\frac{5}{2}+2=\frac{9}{2}$$

$$A=A_1-A_2=9-\frac{9}{2}=\frac{18-9}{2}=\frac{9}{2}\,u^2$$

OK!

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

EL $\boxed{\text{RESUELTO OFICIAL}}$ ESTÁ MAL!!

2 Sea la matriz $C = A \cdot B$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Encontrar los valores de "m" para los cuales existe inversa de la matriz C

b) Calcular la matriz inversa de C, en el caso de que $m=2$.

a)

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2m & 2+2m \\ 1-m & 0 \end{pmatrix}$$

Existe matriz inversa de $C \Leftrightarrow |C| \neq 0$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1+2m & 2+2m \\ 1-m & 0 \end{vmatrix} = 0 - ((2+2m)(1-m)) =$$

$$= -(2 - \cancel{2m} + \cancel{2m} - 2m^2) = -2 + 2m^2$$

$\exists C^{-1} \Leftrightarrow 2m^2 - 2 \neq 0$. Veamos cuando es cero para descartar esos valores.

$$2m^2 - 2 = 0 \Rightarrow 2m^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

Existe C^{-1} $\forall m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$ ✓

b) Hallar C^{-1} para $m=2$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 6 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/6 & 5/6 \end{array}\right) \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/6 & 5/6 \end{pmatrix}$$ ✓

- Comprobamos que $C \cdot C^{-1} = I$

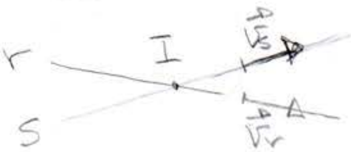
$$\begin{pmatrix}5 & 6\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1/6 & 5/6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{OK!!}$$

3 Hallar el ángulo que forman el plano $\pi: 2x-y+z=0$ y el plano que contiene a las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = z-1$$

Para hayar el ángulo necesitamos los vectores normales de ambos planos; $\vec{n}_\pi(2,-1,1)$.

Calculemos el otro.



Para determinar el plano que contiene a las rectas r y s. Comprobamos primero la posición relativa de las dos rectas.

- $\begin{cases} \vec{u}_r(-1,1,1) \\ \vec{u}_s(-2,0,1) \end{cases}$ $\quad \frac{-1}{-2} \neq \frac{1}{0} \neq \frac{1}{1}$ No son paralelas.

- Veamos si se cortan. (Si se cruzan no existirá un plano que las contenga).

$$r \equiv \begin{cases} \vec{u}_r(-1,1,1) \\ P_r(1,0,0) \end{cases} \Rightarrow \frac{x+1}{-1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1} \Rightarrow \begin{cases} x+1=-y \\ x-1=-z \\ y=z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=+1 \\ x+z=+1 \\ y=z \end{cases} \begin{cases} x+y=+1 \\ y=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=+1-y \\ y=z \end{cases} \Bigg\} \begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ x=+1 \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} y=0 \\ x+1=-2z+2 \end{cases} \begin{cases} y=0 \\ x=1-2z \end{cases}$$

$I(1,0,0)$

SE CORTAN

El plano que los contiene quedará determinado por dos vectores directores y un punto $\begin{cases} P(1,0,0) \\ \vec{v}_r(-1,1,1) \\ \vec{v}_s(-2,0,1) \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & x-1 \\ 1 & 0 & y-0 \\ 1 & 1 & z-0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & -2 & (x-1) \\ 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2y + x - 1 - (-y - 2z) = 0$$

$\Rightarrow -2y + x - 1 + y + 2z = 0 \Rightarrow x - y + 2z - 1 = 0$ PLANO QUE CONTIENE A "r" y "s". Su vector normal es $\vec{n}(1,-1,2)$ ✓

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_\pi(2,-1,1) \\ \vec{n}(1,-1,2) \end{array}\right\} \cos(\widehat{\vec{n}_\pi, \vec{n}}) = \frac{2\cdot 1 + (-1)(-1) + 1\cdot 2}{\sqrt{4+1+1}\cdot\sqrt{1+1+4}} = \frac{5}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{5}{6}$$

$\Rightarrow \arccos\left(\frac{5}{6}\right) = 33'56^{\circ}$ Ángulo pedido

✓

4 Una compañía fabrica ventiladores de CPU sabe que el tiempo de vida que (en meses) de sus ventiladores se distribuye según una normal de media igual a 18 meses y desviación típica 3,6 meses. Elegido un ventilador al azar:

a) Calcula la probabilidad de que funcione como mucho 16 meses.

b) Calcula la probabilidad de que funcione al menos 1 año.

c) Calcula la probabilidad de que funcione entre 1 y 2 años

$N(18, 3{,}6)$

$P(X<16) = P(X\leq 15)$

a) $P(X\leq 15) = P\left(z\leq \frac{15-18}{3{,}6}\right) = P\left(z\leq \frac{-3}{3{,}6}\right) = 1 - P\left(z\leq \frac{-3}{3{,}6}\right) =$

$= P(z\leq -0'83) = 1 - P(z\leq 0'83) = 1 - 0'7967 =$

$= 0'2033$ ✓

b) 1 año = 12 meses AL MENOS UN AÑO ≡ X > 1

$P(X>1) = P(X>12) = P\left(z > \frac{12-18}{3'6}\right) = P(z>-1'67) =$

$= P(z<1'67) = 0'9525$ ✓

c) $P(12\leq X\leq 24) = P(X\leq 24) - P(X\leq 12) = P\left(z\leq \frac{24-18}{3{,}6}\right) -$

$- P\left(z\leq \frac{12-18}{3'6}\right) = P\left(z\leq \frac{6}{3'6}\right) - P\left(z\leq \frac{-6}{3'6}\right) = P(z\leq 1'66) -$

$- \underbrace{P(z\leq -1'66)}_{1-P(z\leq 1'66)} = 0'9515 - (1-0'9515) = 0'903$ ✓