MATEMÁTICAS II (JUNIO)

OPCIÓN B

1 Dada la siguiente expresión de la función f, de la que se desconocen algunos valores

$$f(x) = \begin{cases} a - x & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{b}{x} - \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calcular los valores de "a" y "b" para que f sea derivable en todo su dominio

1º $\forall a \in \mathbb{R}$: $a-x$ es contínua y derivable en $\mathbb{R}$

2º $\forall b \in \mathbb{R}$ $\frac{b}{x} - \ln x$ es contínua y derivable $(0, +\infty)$

si $x=0$ $\nexists \frac{b}{x}$ } pero $0 \notin (1, \infty)$
si $x<0$ $\nexists \ln(x)$

El único punto conflictivo es $\boxed{x=1}$

ⓐ Derivable en $x=1$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 1 \\ (b \cdot x^{-1} - \ln(x))' = -b x^{-2} - \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Punto crítico $x=1$

$$\left.\begin{cases} 1 - \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} -1 = -1 \\ 2 - \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{-b}{x^2} - \frac{1}{x}\right) = \frac{-b}{1} - 1 = -b - 1 \\ 3 - f'(1) = -1 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow -1 = -b - 1 \Rightarrow b = -1 + 1 \Rightarrow \underline{b = 0}$ ✓

ⓑ Contínua en $x=1$

$$\left\{\begin{array}{l} 1-\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(a-x) = a-1 \\ 2-\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{b}{x}-\ln(x)\right) = \frac{b}{1} - \underbrace{\ln 1}_{0} = b \\ 3-\ f(1) = a-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a-1=b \\ y\ b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a=1}$$

$$\ln 1 = n \overset{\text{DEF.}}{\Leftrightarrow} e^n = 1 \Leftrightarrow n=0$$

LA FUNCIÓN ES DERIVABLE $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=0 \\ a=1 \end{array}\right.$

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} 1-x & \text{si } x\leq 1 \\ -\ln(x) & \text{si } x>1 \end{array}\right.$$

✓

② Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\left\{\begin{array}{l} 2X+3Y = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} \\ X-2Y = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

Resolvemos por reducción eliminando variable X:

$$\begin{array}{r} \cancel{2X}+3Y = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} \\ + \quad \cancel{-2X}+4Y = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ 14 & -6 & 2 \end{pmatrix} \\ \hline 7Y = \begin{pmatrix} 14 & -7 & 0 \\ 21 & -7 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad ✓$$

Por sustitución y despejamos X:

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

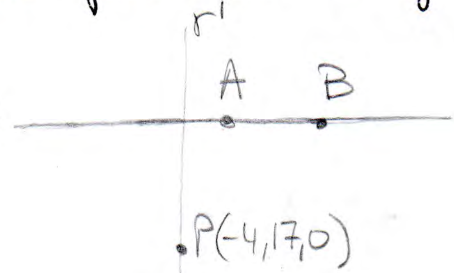
$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad ✓$$

③ Se consideran los puntos $A(2,-1,1)$ y $B(-2,3,1)$ que determinan la recta r

ⓐ Calcular la recta perpendicular a r que pasa por el punto $P(-4,17,0)$

ⓑ Determinar el plano π respecto del cual los puntos A y B son simétricos.

ⓐ



La recta $r' \perp r$, $P(-4,17,0) \in r'$ $\Rightarrow \begin{cases} P(-4,17,0) \\ r' \perp \vec{AB}(-4,4,0) \end{cases}$

Necesitamos un vector $\vec{u}$ perpendicular a $\vec{AB}$ $\Rightarrow$

$\vec{u}(u_1,u_2,u_3)\cdot\vec{AB}(-4,4,0)=0 \Rightarrow$

PRODUCTO ESCALAR

NOTA: $\begin{cases} \vec{u}\cdot\vec{v}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\, v_3 \\ \vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \end{cases}$

$\cos(90^\circ)=0$

$\Rightarrow u_1\cdot(-4)+u_2\cdot 4+u_3\cdot 0=0 \Rightarrow$

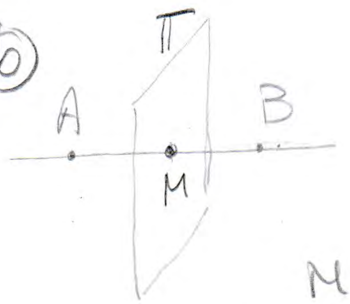
$\Rightarrow -4u_1+4u_2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4u_1=4u_2 \Rightarrow \underline{u_1=u_2}$

Un vector perpendicular a $\vec{AB}$ es, por ejemplo: $\vec{u}(1,1,1)$. La recta pedida $r' \begin{cases} P(-4,17,0) \\ \vec{u}(1,1,1) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow r': \dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y-17}{1}=\dfrac{z-0}{1} \Rightarrow r': x+4=y-17=z$ ✓

ⓑ



El plano pasa por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y tiene por vector normal $\vec{AB}$

$M=\left(\dfrac{2+(-2)}{2},\dfrac{(-1)+3}{2},\dfrac{1+1}{2}\right)=(0,1,1)$ ✓

$\pi: \begin{cases} M(0,1,1) \\ \vec{n}(-4,4,0) \end{cases} \Rightarrow -4x+4y+0z+D=0$ y verifica: $0+4+D=0 \Rightarrow D=-4$ ✓

$\Rightarrow \pi: -4x+4y-4=0 \equiv \pi: -x+y=4$ ✓

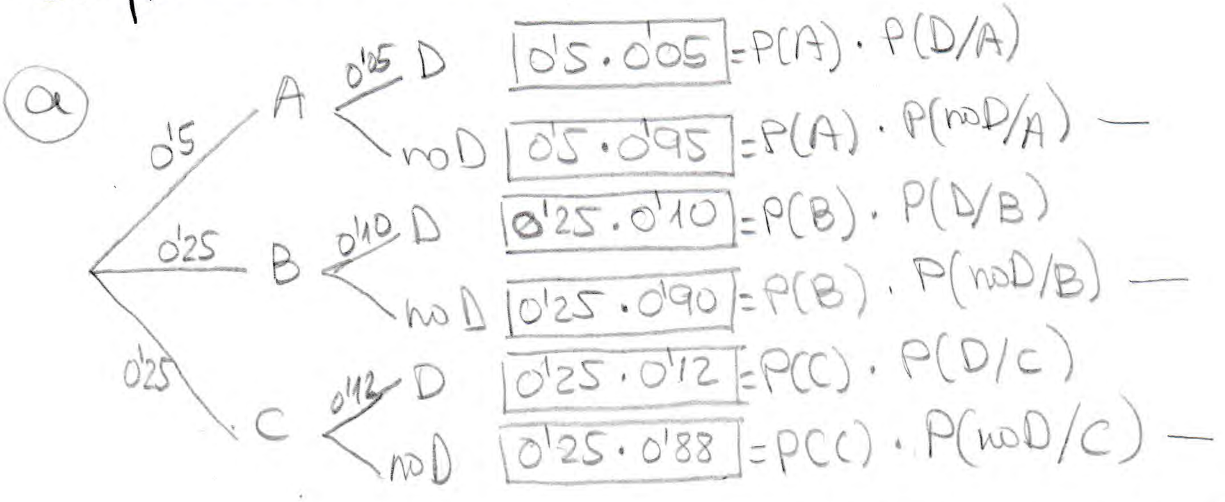
4) Una planta ensambladora de circuitos recibe componentes procedentes de tres fábricas: A, B y C. El 50% del total de los componentes se compra al fabricante A, mientras que a los fabricantes B y C se les compra un 25% a cada uno. El porcentage de componentes defectuosos es de un 5% para el fabricante A, el 10% para el fabricante B y el 12% para el fabricante C.

a) Construir el diagrama de árbol con las probabilidades asignadas.

b) El departamento de control de calidad elige un circuito al azar en el almacen. Hallar la probabilidad de que contenga componentes defectuosos

c) Elegido al azar un circuito que no tiene componentes defectuosos, ¿Qué porcentages de dichos componentes han sido vendidos por el proveedor B?

a)



b) $P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) =$

$= 0'5 \cdot 0'05 + 0'25 \cdot 0'1 + 0'25 \cdot 0'12 =$

$= 0'08$ ✓

c) $P(B/noD) = \dfrac{P(B)\cdot P(noD/B)}{P(A)\cdot P(noD/A) + P(B)\cdot P(noD/B) + P(C)\cdot P(noD/C)} = \dfrac{0'25 \cdot 0'90}{0'92}$

$= \dfrac{0'225}{0'92} = 0'2445 \Rightarrow$ En porcentage: $24'45\%$

NOTA: Comprobamos resultado del Ej. 2

$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$2X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 9 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix}$ ok!

$X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ ok!