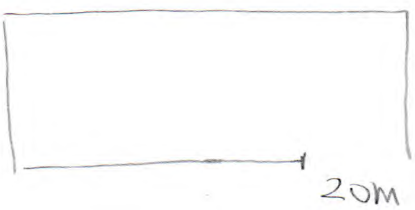
EBAU (18-19)

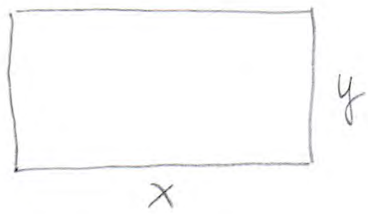
MATEMÁTICAS II (JUNIO)
OPCIÓN A

1) Se desea vallar un terreno rectangular usando 100 m de una tela metálica. Se ha decidido dejar una abertura de 20m sin vallar en uno de los lados de la parcela para colocar una puerta. Calcular las dimensiones de todos los lados de la parcela rectangular de área máxima que puede vallarse de esa manera. ¿Cuál es el valor de dicha área máxima?



$P_{RECT.} = 120m$

$P_{RECT} = 2x+2y$



— 1º Busco la relación entre las dimensiones "x" e "y"

$120 = 2x+2y \Rightarrow y = \frac{120-2x}{2} \Rightarrow y = 60-x$

— 2º Función a optimizar: $A_{RECT} = x \cdot y$ y $\Rightarrow$

$f(x) = x\cdot(60-x) = 60x - x^2 \Rightarrow f(x) = -x^2+60x$

— 3º Extremos de "f":

$f'(x) = -2x+60$; si $f'(x)=0 \Rightarrow -2x+60=0 \Rightarrow 2x=60$

$\Rightarrow x=30$, entonces $y = 60-30 = 30$ $\boxed{\begin{matrix} x=30 \\ y=30 \end{matrix}}$ ✓

— 4º Comprobamos que se trata de un máximo

$f''(x) = -2 < 0, \forall x \Rightarrow$ ES UN MÁXIMO

LAS DIMENSIONES DEL TERRENO DE ÁREA MAXIMA | $x = 30m$ $y = 30m$ ÁREA $900\ m^2$

② Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y sea I_2 la matriz identidad de orden 2.

ⓐ Calcular el valor de "x" de modo que se verifique la igualdad: $B^2=A$

ⓑ Calcular el valor de "x" para que: $A-I_2=B^{-1}$

ⓒ Calcular el valor de "x" para que: $A\cdot B=I_2$

ⓐ $B^2=A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1=x \longrightarrow \boxed{x=1} \\ 1=1 \\ 1=1 \\ 2=x+1 \quad \text{ok!} \end{cases}$

NOTAS:

$B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ✓

ⓑ $A-I_2=B^{-1}$

Necesitamos calcular B^{-1} y $|B|=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$, luego existe B^{-1}

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & +1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ ✓

Compruebo que $B\cdot B^{-1}=I_2$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ok!!

$A-I_2=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$ luego:

$\begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-1=-1 \longrightarrow \boxed{x=0} \\ 1=1 \\ 1=1 \\ x=0 \end{cases}$ ✓

ⓒ $A \cdot B = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x+1 \\ x+1 & x+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ x+1=0 \to x=-1 \\ x+1=0 \\ x+2=1 \to x=-1 \end{cases}$ $\boxed{x=-1}$ ✓

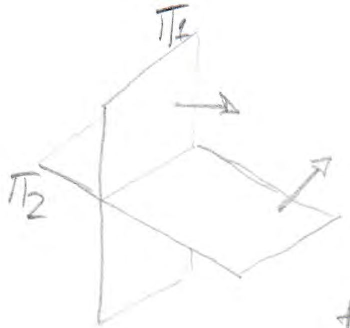
③ Dados los planos $\pi_1 \equiv x-y+3=0$ y $\pi_2 \equiv 2x+y-z=0$ Calcular:

ⓐ Ecuación de la recta s paralela a los planos π_1 y π_2 que pase por el punto $B(2,2,3)$

ⓑ El ángulo que forman los planos.

ⓐ

$s \equiv \begin{cases} B(2,2,3) \\ \vec{n}_1(1,-1,0) \text{ vector normal de } \pi_1 \\ \vec{n}_2(2,1,-1) \text{ vector normal de } \pi_2 \end{cases}$ $\Big\} \Rightarrow (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2)$ vector director de la recta



NOTA: Posición relativa de los planos:

$\frac{1}{2} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{0}{-1}$ No son paralelos $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Se cortan en una recta que tendrá como vector director, el producto vectorial de los vectores normales de π_1 y π_2

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} = (1,-1,3)$$

$s \equiv \begin{cases} B(2,2,3) \\ \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1,-1,3) \end{cases}$ $\Big\} \; \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{3}$ ✓

Ec. continua de la recta s pedida.

4

ⓑ El ángulo que forman los planos es igual al ángulo que forman sus vectores normales

$\vec{n}_1(1,-1,0)$
$\vec{n}_2(2,1,-1)$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2| \cdot \cos(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2})$$

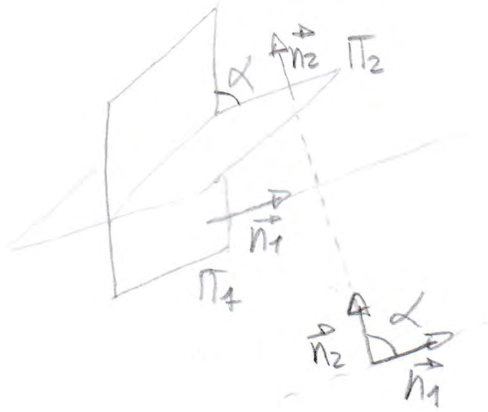
$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1\cdot 2 + (-1)\cdot 1 + 0\cdot(-1) = 2-1 = 1$$

$$\cos(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}) = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad ⊛$$

NOTAS:

$|\vec{n}_1| = \sqrt{1^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{2}$ y $|\vec{n}_2| = \sqrt{2^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{6}$

⊛ $\alpha = (\widehat{\pi_1, \pi_2}) = (\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}) = \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = 73'22^{o}$ ✓



④

4 En un banco se sabe que el tiempo de devolución de un préstamo de 18.000€ sigue una distribución normal de media 60 meses y desviación típica 8 meses. Se elige al azar un préstamo de 18.000€

a) Calcular la probabilidad de que dicho préstamo se devuelva como mucho en 70 meses

b) Cual es la probabilidad de que fuera devuelto al menos en 4 años?

c) Que porcentage de prestamos de 18.000€ del mismo banco se formalizan para ser devueltos entre los 4 y los 6 años

Distribución normal

$N(60, 8)$ $\mu = 60$ meses, $\sigma = 8$ meses $\quad z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

a) $P(X \leq 70) = P\left(z \leq \frac{70-60}{8}\right) = P\left(z \leq \frac{10}{8}\right) = P(z \leq 1'25)$
$= 0'8944$ ✓

b) 4 años $= 4 \cdot 12 = 48$ meses

$P(x > 48) = P\left(z > \frac{48-60}{8}\right) = P\left(z > \frac{-12}{8}\right) = P(z > -1'5) =$
$= P(z < 1'5) = 0'9332$ ✓

c) 4 años $= 4 \cdot 12 = 48$ meses

6 años $= 6 \cdot 12 = 72$ meses

$P(48 < X < 72) = P(X < 72) - P(X < 48) = P\left(z < \frac{72-60}{8}\right) -$
$- P(z < 1'5) = P(z < 1'5) - P(z < -1'5) = 0'9332 -$
$(1 - 0'9332) = 0'9332 - 0'0668 = 0'8664$

86'64% ✓