# Modelo 1

## OPCIÓN B

1.- Calcular las asíntotas y los extremos relativos de la función $y = 3x + \dfrac{3x}{x-1}$

Criterios

- Comprobemos si tiene una asíntota vertical en $x = 1$. Se tiene:
$\lim_{x\to 1^-}\left(3x + \frac{3x}{x-1}\right) = 3 + \frac{3}{0^-} = -\infty$
$\lim_{x\to 1^+}\left(3x + \frac{3x}{x-1}\right) = 3 + \frac{3}{0^+} = +\infty$
Luego la recta $x = 1$ es una asíntota vertical. **(0,5 puntos)**

- Veamos si tiene asíntotas horizontales:
$$\lim_{x\to-\infty}\left(3x + \frac{3x}{x-1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^2}{x-1}\right) = \frac{\infty}{-\infty} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x}{1-\frac{1}{x}}\right) = \frac{-\infty}{1-0} = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(3x + \frac{3x}{x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{x-1}\right) = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{1-\frac{1}{x}}\right) = \frac{+\infty}{1-0} = +\infty$$
Por tanto, no tiene asíntotas horizontales. **(0,5 puntos)**

- Asíntotas oblicuas $y = mx + n$.
$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{x} + \frac{3x}{x(x-1)}\right) = 3 + 0 = 3$$
$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x}{x} + \frac{3x}{x(x-1)}\right) = 3 + 0 = 3$$
$$n = \lim_{x\to+\infty}(y - mx) = \lim_{x\to+\infty}\left(3x + \frac{3x}{x-1} - 3x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{x-1}\right) = 3$$
y en $-\infty$
$$n = \lim_{x\to-\infty}(y - mx) = \lim_{x\to-\infty}\left(3x + \frac{3x}{x-1} - 3x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x}{x-1}\right) = 3$$
Luego la recta $y = 3x + 3$ es una asíntota oblicua. **(0,5 puntos)**

- Para calcular los extremos se tiene:
$y' = 3 + \frac{3(x-1)-3x}{(x-1)^2} = 3 + \frac{-3}{(x-1)^2} = \frac{3x(x-2)}{(x-1)^2}$ **(0,5 puntos)**

Si igualamos $y' = 0$ obtenemos $3x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 2$ que son los puntos críticos. Hallamos la segunda derivada y calculamos los valores de $y''$ en los puntos críticos.

$$y'' = \frac{6}{(x-1)^3} \Rightarrow \begin{cases} y''(0) = \frac{6}{(-1)^3} = -6 < 0 \Rightarrow \textit{máximo en } (0, y(0)) = (0,0) \\ y''(2) = \frac{6}{1^3} = 6 > 0 \Rightarrow \textit{mínimo en } (2, y(2)) = (2,12) \end{cases}$$

**(0,5 puntos)**

2.- Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 2 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcular los valores del parámetro $m$ para los cuales la matriz $A$ tiene inversa

b) Para $m$ = 1, calcular la matriz inversa $A^{-1}$

Criterios

a) Calculemos cuales son los valores de $m$ que hacen que A sea una matriz singular, es decir los valores que anulan al determinante de $A$, $(|A|=0)$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 2 \\ m-2 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(m-2)\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ m+1 & 2 \end{vmatrix}=(m-2)\cdot(m+1) \Longrightarrow |A|=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (m-2)\cdot(m+1)=0 \Longrightarrow \boldsymbol{m_1=2,\ m_2=-1}$. **(0.5 ptos)**

Entonces A tendrá inversa, es decir, será regular: $\forall\, \boldsymbol{m} \in \mathbb{R}-\{\mathbf{2},\mathbf{-1}\}$. **(0.5 ptos)**

b) Para $m=1$, la matriz $A$ será

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces: $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-1\cdot 2=-2\neq 0$

Es decir: $\exists\, A^{-1}=\frac{[Adj(A)]^t}{|A|}$, de donde, **(0.5 ptos)**

$$\left.\begin{matrix} A_{11}=0;\ A_{12}=-2;\ A_{13}=2 \\ A_{21}=0;\quad A_{22}=-1;\ A_{23}=0 \\ A_{31}=2;\quad A_{32}=-2;\ A_{33}=2 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow Adj(A)=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow [Adj(A)]^t=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ **(0.5 ptos)**

Es decir,

$$A^{-1}=\frac{[Adj(A)]^t}{|A|}=\frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ **(0.5 ptos)**

3.- Dados los planos: $\pi_1: x+y+z-5=0$ y $\pi_2\equiv\begin{cases} x=3+\lambda+2\mu \\ y=1-\lambda-\mu \\ z=1+\mu \end{cases}$

a) Comprobar que los planos $\pi_1$ y $\pi_2$ se cortan en una recta. Hallar la ecuación de dicha recta en forma paramétrica.

b) Hallar la ecuación del plano $\pi_3$ que pasa por el origen y es perpendicular a los planos $\pi_1$ y $\pi_2$

Criterios

a) Hallamos la ecuación general del plano

$$\pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x+y-z-3=0$$ **(0.25 ptos)**

Discutir el sistema $\begin{cases} \pi_1 : x+y+z-5=0 \\ \pi_2 : x+y-z-3=0 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $rgA = 2$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ $A/b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $rg(A/b) = 2$ **(0.25 ptos)**

Los planos se cortan en una recta. **(0.25 ptos)**

Hallando la ecuación de la recta intersección de los planos.

Hallamos la solución general del sistema $\begin{cases} x+y+z-5=0 \\ x+y-z-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=5-y \\ x-z=3-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=1 \\ x=4-y \end{cases}$;Sol part $y=0$ $P(4,0,1)$ **(0.5 ptos)**

La recta pasa por $P$ (4,0,1)

Y vector director viene dado por $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -i + j \Rightarrow \vec{v}_r = (-1,1,0)$ **(0.25 ptos)**

La ecuación paramétrica de la recta es: $\begin{cases} x = 4-\lambda \\ y = \quad \lambda \\ z = 1 \end{cases}$ **(0.25 ptos)**

b) Ecuación del plano $\pi_3$ que pasa por el origen $O(0,0,0)$ y es perpendicular a $\pi_1$ y $\pi_2$

$$\pi_3 : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-y=0$$ **(0.75 ptos)**

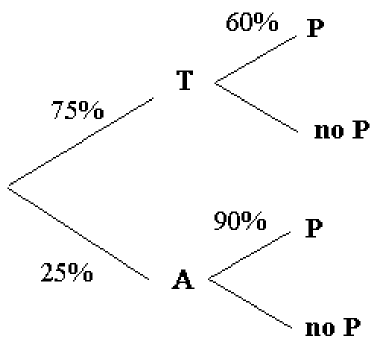
4.- El 75% de los alumnos de un instituto acude a clase en algún tipo de transporte y el resto acude andando. Por otra parte, llegan puntual a clase el 60% de los que utilizan transporte y el 90% de los que acuden andando. Se pide:

a) Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya llegado puntual a clase?

b) Si se elige al azar uno de los alumnos que ha llegado puntual a clase, ¿cuál es la probabilidad de que haya acudido andando?

Criterios

Diagrama de árbol




Definimos los siguientes sucesos:

T $=$ {el alumno acude a clase usando transporte}

A $=$ {el alumno acude a clase andando}

P $=$ {el alumno llega puntual a clase}

a) Vamos a calcular la probabilidad de que un alumno haya llegado puntual a clases $P(P)$. Lo haremos utilizando el Teorema de la Probabilidad Total **(1 pto)**

$$P(P) = P(P \cap T) + P(P \cap A) = P(T) \cdot P\left(\frac{P}{T}\right) + P(A) \cdot P\left(\frac{P}{A}\right)$$
$$= 0'75 \cdot 0'6 + 0'25 \cdot 0'9 = 0'675$$

La probabilidad de que un alumno no haya llegado puntual a clases es,

$P(\overline{P}) = 1 - P(P) = 1 - 0.675 = 0.325$ **(0.25 ptos)**

b) Aplicaremos el Teorema de Bayes, para calcular la probabilidad pedida **(1.25 ptos)**

$$P\left(\frac{A}{P}\right) = \frac{P(A \cap P)}{P(P)} = \frac{P(A) \cdot P\left(\frac{P}{A}\right)}{P(P)} = \frac{0'25 \cdot 0'9}{0'675} = 0'\hat{3} = \frac{1}{3}$$